

Лекция 1/1  
(99)

ТАУ.

Объект управления - тех. уст-во или процесс, поведение которого в силу определенных условий не удовлетворяет оператора

Управление - воздействие на объект управления с целью изменить его поведение желаемым образом

Регулирование - частный случай управления, целью которого явл. упр. в опред. состоянии

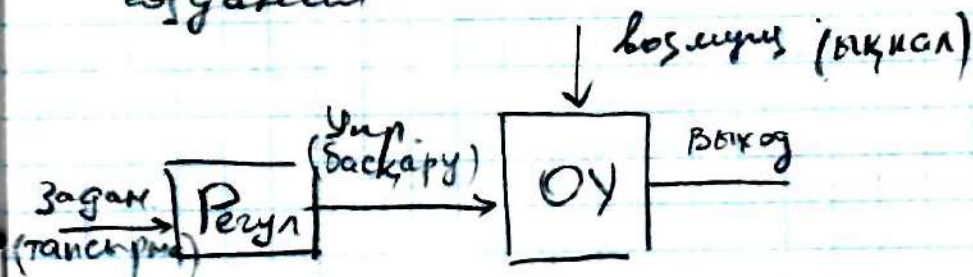
Автоматический процесс - выполняется без участия человека

Система - совокупн. элем. объедин. для достиже. общей цели.

Динамическая система - процесс связан с изменением времени.

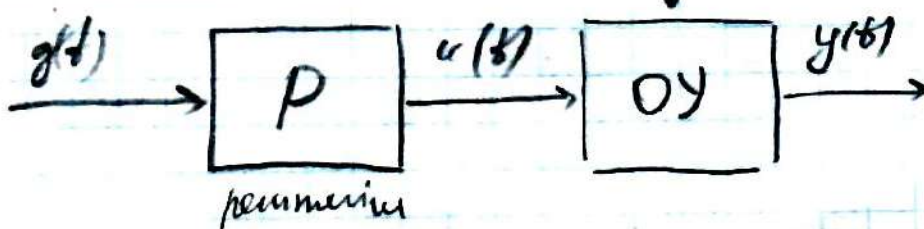
Система автоматического регулирования - динамическая система, к-рая без человека

ТАУ - раздел науки и техники, изучающий свойства систем автоматического упр. и принципы их проектирования и создания

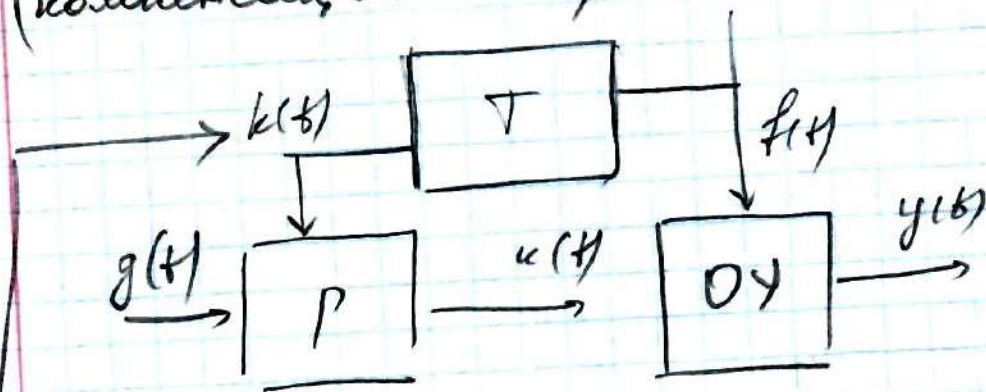


Заранее = выход

Принципы регулирования ↓  $f(t)$  (разомкнутое)

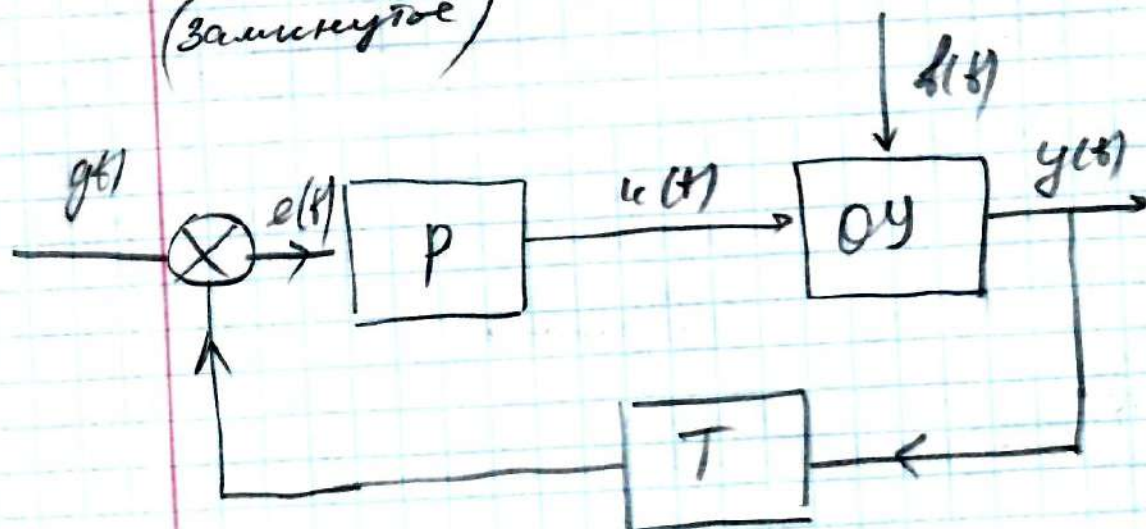


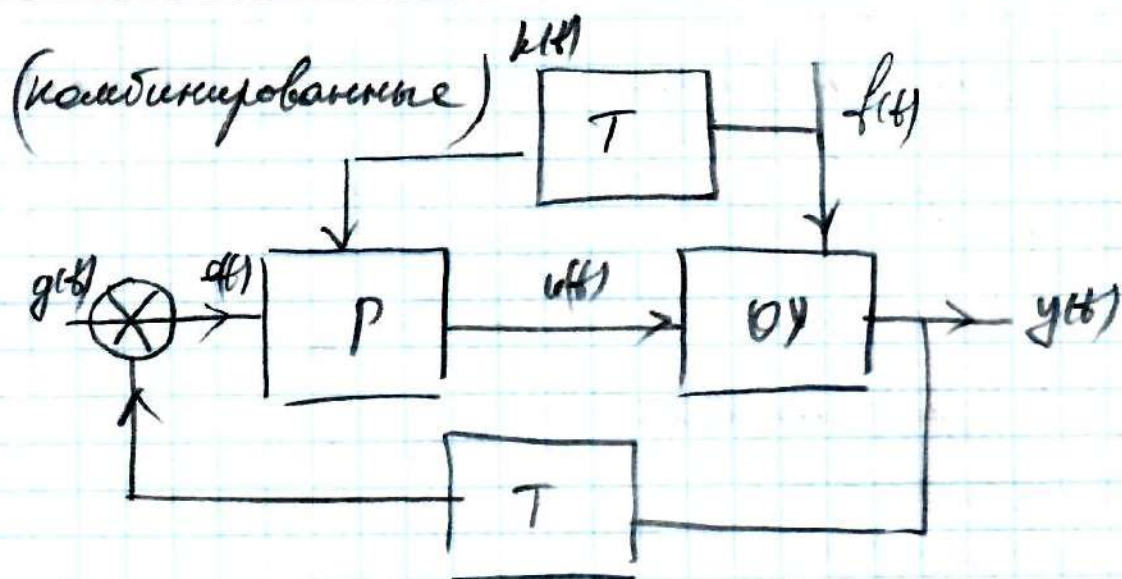
(комбинированное)



измерение  
возмущающего воздействия  
для передачи информации в  
регулятор

(замкнутое)



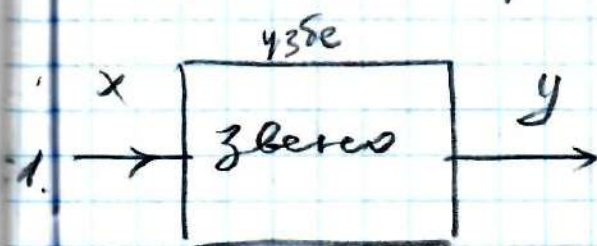


## Виды систем автоматического управления

- По принципу управления
  - замкнутые
  - разомкнутые
  - комбинированные
- По математическому описанию
  - линейные
  - нелинейные
- По видам сигналов в системах
  - непрерывные
  - дискретные
  - гибридные
  - модифицированные
- По описанию параметров
  - стационарные
  - нестационарные
  - с распределенными параметрами
- По числу регулируемых параметров
  - одномерные
  - многомерные

- По цели регулирования
  - стабилизации
  - программного управления
  - следящие
- По адаптации к внешним возмущениям
  - адаптивные
  - не адаптивные
- По топологии
  - одноконтурные
  - многоконтурные
- По влиянию исполнительного механизма
  - прямого влияния
  - косвенного влияния
- По статической ошибке
  - статические
  - астатические
- По адаптивному управлению
  - дискретные
  - с настроенными параметрами
  - с настроенной структурой
- По характеру оптимизации
  - оптимальные
  - неоптимальные

## Лекция 2 Графические характеристики

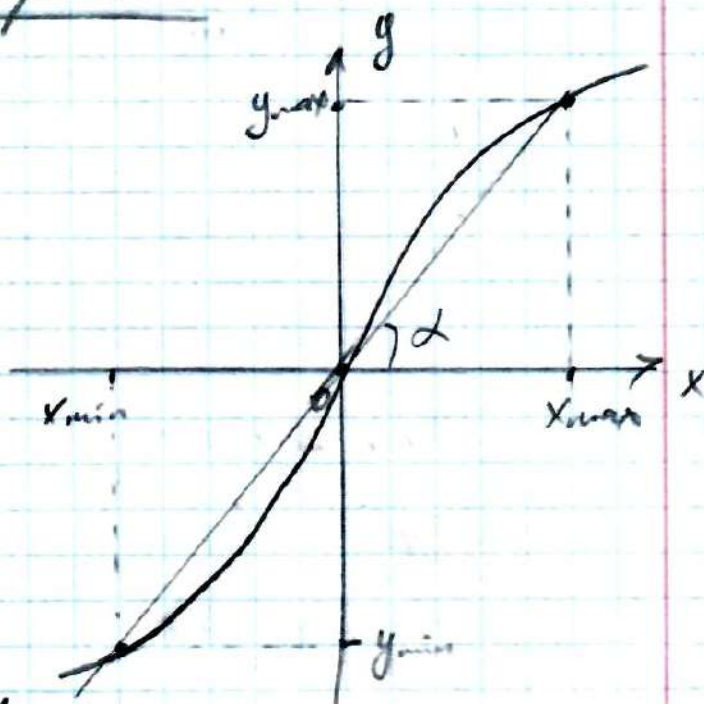


$$y = f(x)$$

$$x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$$

$$\Delta y \approx k \Delta x$$

$$k = f'(\alpha) = f'\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{dy(x)}{dx}$$



### Пример 1

$$y = x^2 + x + 1, \quad x_0 = 1.$$

$$k = \frac{dy}{dx} = 2x + 1; \quad k(x_0) = 2x_0 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

при этом получаем

$$\Delta y = 3 \Delta x$$

Пример 2  $\rightarrow (y^2 = x^2 + 10\sqrt{x}), \quad x_0 = 1.$

$$y_0 = \sqrt{x^2 + 10\sqrt{x}} = \sqrt{1 + 10\sqrt{1}} = \sqrt{11} \approx 3.32$$

$$x_0 = 1; \quad y_0 = 3.32$$

$$f(x, y) = x^2 + 10\sqrt{x} - y^2$$

$$f(x, y) = x^2 + 10\sqrt{x} - y^2$$

$$k_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \Big|_{y_0} = -2 \cdot 3,32 = -6,64$$

$$k_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \frac{10^5}{2\sqrt{x}} \Big|_{x_0} = 2 + 5 = 7$$

$$k_x \cdot \Delta x + k_y \cdot \Delta y = 0$$

$$7\Delta x + 6,64\Delta y = 0$$

$$6,64\Delta y = -7\Delta x$$

$$\Delta y = \frac{-7}{6,64} \Delta x$$

$$\Delta y = -1,05\Delta x$$

Пример 3 много переменное свертно

$$y^2 = 2u^2f + 3f^2u; \quad u_0 = 1, \quad f_0 = 0,5$$

$$y_0 = \sqrt{2u^2f + 3f^2u} = \sqrt{2 \cdot 1 \cdot 0,5 + 3 \cdot (0,5)^2} = \sqrt{1,75} = 1,323$$

$$F(u, f, y) = 2u^2f + 3f^2u - y^2$$

$$k_y = \frac{\partial F}{\partial y} = -2y \Big|_{y_0} = -2 \cdot 1,323 = -2,646$$

$$k_u = \frac{\partial F}{\partial u} = 4fu + 3f^2 \Big|_{u_0, f_0} = 2 + 0,75 = 2,75$$

$$k_f \frac{\partial F}{\partial f} = 2u^2 + 6uf / u, f_0 = 2 + 3 = 5$$

$$k_u \Delta u + k_f \Delta f + k_y \Delta y = 0$$

$$2,75 \cdot \Delta u + 5 \cdot \Delta f - 3,5 \Delta y = 0$$

$$\Delta y = 0,78 \Delta u + 1,4 \Delta f$$

Линеаризация динамических моделей

↓  $u(t)$



$$F(x_1, x_2, \dot{x}_2, x_3, \dot{x}_3, \ddot{x}_3, \ddot{x}_3) = \varphi(u, \dot{u})$$

$$x_1 = x_1^0 + \Delta x_1, \quad \dot{x}_1 = \Delta \dot{x}_1$$

$$x_2 = x_2^0 + \Delta x_2, \quad \dot{x}_2 = \Delta \dot{x}_2$$

$$x_3 = x_3^0 + \Delta x_3, \quad \dot{x}_3 = \Delta \dot{x}_3$$

$$\ddot{x}_3 = \Delta \ddot{x}_3, \quad \ddot{x}_3 = \Delta \ddot{x}_3$$

$$F(x_1^0, x_2^0, 0, x_3^0, 0, 0, 0) = \varphi(u^0, 0)$$

$$F(x_1^0, x_2^0, x_3^0) + \frac{\partial F}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} \Delta \dot{x}_2 + \frac{\partial F}{\partial x_3} \Delta x_3 +$$

$$+ \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_3} \Delta \dot{x}_3 + \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_3} \Delta \ddot{x}_3 + \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_3} \Delta \ddot{x}_3 = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \Delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}} \Delta \dot{u}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = k_1; \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = k_2; \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_2} = k_3; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} = k_4 = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{u}} = k_5$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = T_1; \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_3} = T_2; \quad \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_3} = T_3; \quad \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}_3} = T_4$$

$$k_1 \Delta x_1 + k_2 \Delta x_2 + k_3 \Delta \dot{x}_2 + T_1 \Delta x_3 + T_2 \Delta \dot{x}_3 + T_3 \Delta \ddot{x}_3 + T_4 \Delta \ddot{x}_3 = k_4 \Delta u + k_5 \Delta \dot{u}$$

Используем преобразование Лапласа

$$k_1 \Delta X_1 + (k_2 + k_3 s) \Delta X_2 + (T_1 + T_2 s + T_3 s^2 + T_4 s^3) \Delta X_3 = (k_4 + k_5 s) \Delta u$$

т.к. входной сигнал равен нулю  $X_1$ ;  $\forall$

$$\Delta X_3 = \frac{(k_4 + k_5 s) \Delta u}{T_1 + T_2 s + T_3 s^2 + T_4 s^3} - \frac{(k_2 + k_3 s) \Delta X_2}{T_1 + T_2 s + T_3 s^2 + T_4 s^3} - \frac{k_1 \Delta X_1}{T_1 + T_2 s + T_3 s^2 + T_4 s^3}$$

$$\Delta X_3 = W_4(s) \Delta u - W_{\Delta X_2}(s) \Delta X_2 - W_{\Delta X_1}(s) \Delta X_1$$

↑  
переходные функции

Генераторная функция - отношение выход-  
ного сигнала ко входному  
выраженное в виде преобразования Лапласа

Пример 4

$$2y + x\dot{y} + x^2\ddot{y} + x^2u + x\dot{u} - u\dot{x} = 0; \quad x_0 = u_0 = 2$$

$$F = 2y + x\dot{y} + x^2\ddot{y} + x^2u + x\dot{u} - u\dot{x};$$

$$2y + x^2u = 0$$

$$y = -\frac{x^2u}{2} = -\frac{4 \cdot 2}{2} = -4$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = (2y)' = 2; \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{y}} = x_0 = 2; \quad \frac{\partial F}{\partial \ddot{y}} = x_0^2 = 4$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} = x_0^2 = 4; \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{u}} = x_0 = 2; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x_0u_0 = 8$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = -u_0 = -2$$

$$2\Delta y + 2\Delta \dot{y} + 4\Delta \ddot{y} + 4\Delta u + 2\Delta \dot{u} + 8\Delta x - 2\Delta \dot{x} = 0$$

$$(2 + 2s + 4s^2)\Delta Y = -(4 + 2s)\Delta u + (2s - 8)\Delta x$$

$$\Delta Y = -\frac{(4 + 2s)\Delta u}{2 + 2s + 4s^2} + \frac{(2s - 8)\Delta x}{2 + 2s + 4s^2}$$

$$W_u(s) = \frac{4 + 2s}{2 + 2s + 4s^2}; \quad W_x(s) = \frac{2s - 8}{2 + 2s + 4s^2}$$

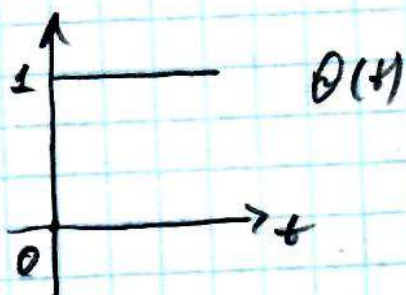
# Преобразование Лапласа

$f(t) \rightarrow F(p)$   
 оригинал образ

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

$$p = \alpha + j\omega; \quad j = \sqrt{-1}$$

①



$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \frac{1}{(-p)} e^{-pt} \Big|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{-1}{(-p)} e^{-pt} \Big|_{t=0} = \frac{1}{p}$$

| $f(t)$                   | $F(p)$           |
|--------------------------|------------------|
| 1                        | $\frac{1}{p}$    |
| $e^{-qt}$                | $\frac{1}{p+q}$  |
| $\frac{df}{dt}$          | $pF(p) - f(0)$   |
| $\int_0^t f(\tau) d\tau$ | $\frac{F(p)}{p}$ |

$$\textcircled{2} f(t) = e^{-qt}$$

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-(q+p)t} dt = \frac{1}{p+q}$$

$$\textcircled{3} g(t) = \frac{df}{dt}$$

$$G(p) = \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} e^{-pt} dt =$$

$$= \int df e^{-pt} = f e^{-pt} \Big|_0^{\infty} - \int f(t) (-p) e^{-pt} dt$$

$$= -f(0) + p \int f(t) e^{-pt} dt$$

$$\begin{cases} v = f \\ u = e^{-pt} \text{ no constant} \end{cases}$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

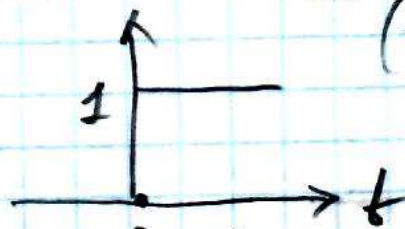
### Лекция 3

## Временные характеристики САУ

Тестовые входные сигналы:

1. Единичное ступенчатое воздействие (Хевисайд)

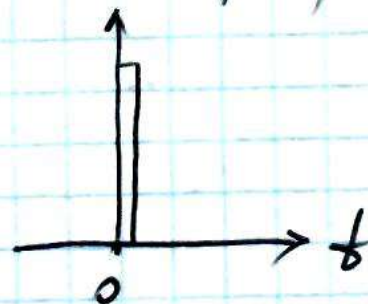
$$1(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$



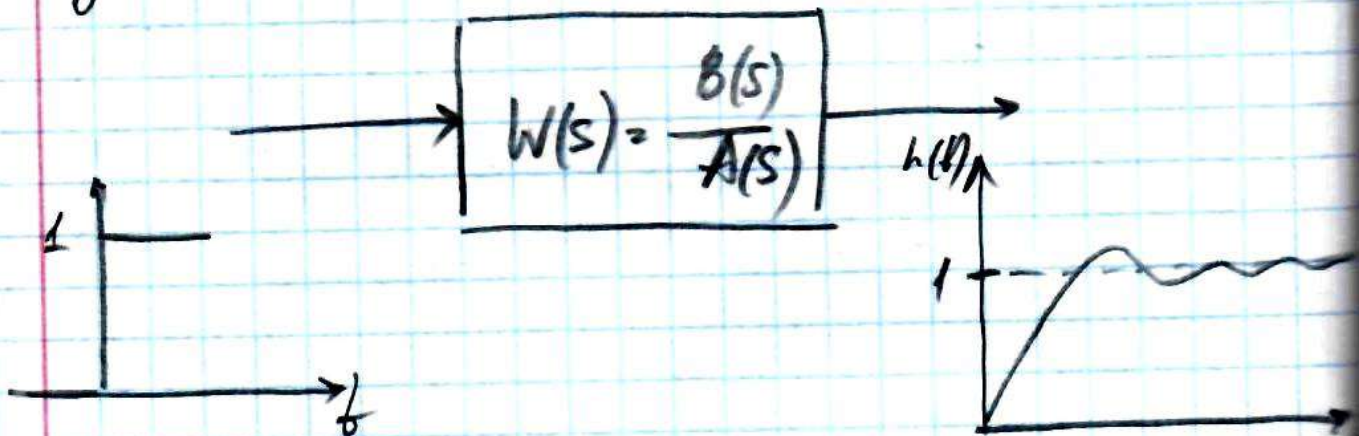
функция Хевисайда

2. Единичный импульс (Дирак)

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$



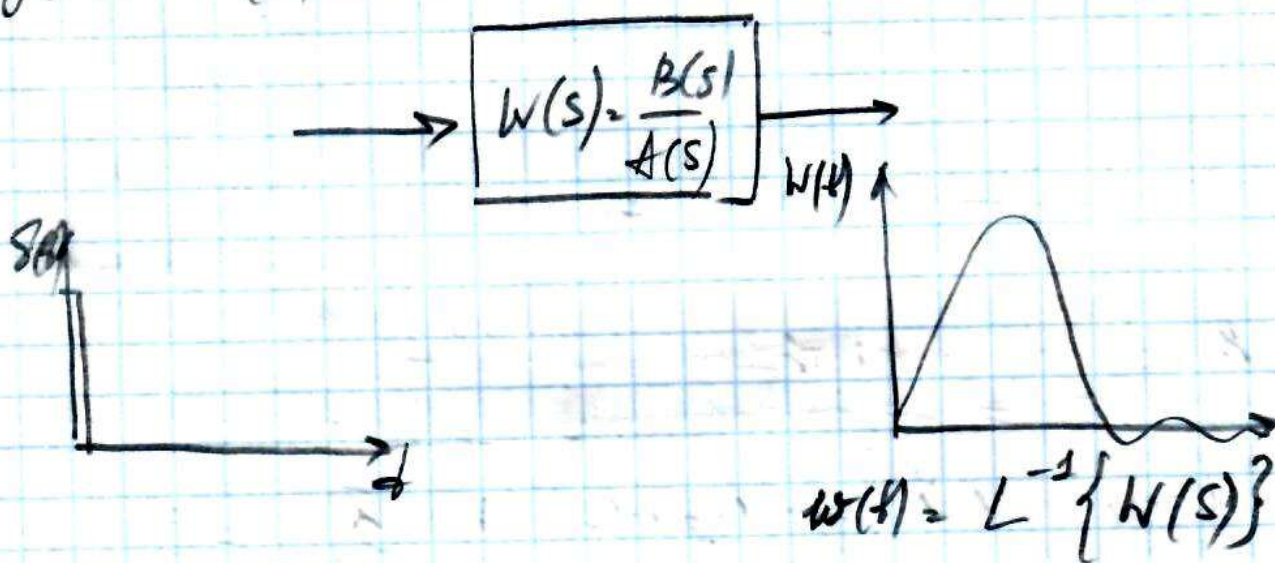
$$g(t) = 1(t)$$



$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}$$

Переходная характеристика

$$g(t) = \delta(t)$$



$$1'(t) = \delta(t)$$

$$h'(t) = w(t)$$

Пример 1.

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{6s^2 + 5s + 1}$$

$$H(s) = \frac{W(s)}{s} = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{s(6s^2 + 5s + 1)}$$

$$A(s) = s(6s^2 + 5s + 1) = 0$$

корни полинома?  $s_1 = 0$ ,  $s_2 = -\frac{1}{3}$ ,  $s_3 = -\frac{1}{2}$

$$H(s) = \frac{M_1}{s-0} + \frac{M_2}{s-(-\frac{1}{3})} + \frac{M_3}{s-(-\frac{1}{2})}$$

нахождение коэффициентов  $M_1, M_2, M_3$

$$M_i = \frac{B(s_i)}{A'(s_i)}$$

$$A'(s) = (s(6s^2 + 5s + 1))' = (6s^3 + 5s^2 + s)' = 18s^2 + 10s + 1$$

$$M_1 = \frac{B(0)}{A'(0)} = \frac{1}{1} = 1$$

$$M_2 = \frac{B(-\frac{1}{3})}{A'(-\frac{1}{3})} = \frac{1}{\cancel{18} \cdot \frac{1}{3} + (-\frac{1}{3}) \cdot 10 + 1} = \frac{1}{3 - \frac{10}{3}}$$

$$= \frac{1}{\frac{9}{3} - \frac{10}{3}} \cdot \frac{1}{-\frac{1}{3}} = -3$$

$$M_3 = \frac{B(-\frac{1}{2})}{A'(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{\cancel{18} \cdot \frac{1}{2} - \cancel{10} \cdot \frac{1}{2} + 1} = \frac{1}{\frac{9}{2} - 5 + 1}$$

$$= \frac{1}{\frac{9}{2} - 4} = \frac{1}{4\frac{1}{2} - 4} = 2$$

$$H(s) = \frac{1}{s(6s^2 + 5s + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{3}{s + \frac{1}{3}} + \frac{2}{s + \frac{1}{2}}$$

$$h(t) = 1 - 3e^{-\frac{1}{3}t} + 2e^{-\frac{1}{2}t}$$

$$w(t) = h'(t) = 1 - 3e^{-\frac{1}{3}t} + 2e^{-\frac{1}{2}t} = -3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)e^{-\frac{1}{3}t} + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}t} = e^{-\frac{1}{3}t} - e^{-\frac{1}{2}t}$$

этап 2.

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

$$H(s) = \frac{W(s)}{s} = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

$$A(s) = s(s^2 + s + 1); \quad s_1 = 0, \quad s_2 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad s_3 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$s^2 + s + 1 = 0$$

$$D = 1 - 4 = -3$$

$$s_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}j}{2} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad s_3 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$H(s) = \frac{M_1}{s-0} + \frac{M_2}{s - \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{M_3}{s - \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$M_i = \frac{B(s_i)}{A'(s_i)}; \quad A'(s) = (s^3 + s^2 + s)' = 3s^2 + 2s + 1$$

$$M_1 = \frac{B(0)}{A'(0)} = \frac{1}{3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1} = 1$$

$$M_2 = \frac{B\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{A'\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{3\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1}$$

$$= \frac{1}{3\left(\frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}\right) + (-1 + j\sqrt{3}) + 1} = \frac{1}{\frac{3}{4} - \frac{3j\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4} - 1 + j\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{1}{-\frac{6}{4} - \frac{3}{2}j\sqrt{3} + j\sqrt{3}} = \frac{1}{-\frac{3}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{1}{\frac{-3 - j\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{-3 - j\sqrt{3}} \quad \left| \cdot (3 + j\sqrt{3}) \right.$$

$$= \frac{2(-3 + j\sqrt{3})}{(-3 - j\sqrt{3})(-3 + j\sqrt{3})} = \frac{-6 + 2j\sqrt{3}}{9 + 3}$$

$$= \frac{6 + 2j\sqrt{3}}{12} = \frac{-6}{12} + \frac{2j\sqrt{3}}{12} = -\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{6}$$

$$M_3 = -\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{6}$$

$$H(s) = \frac{1}{s} + \frac{-\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{6}}{\left[s + \frac{1}{2}\right] + j\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{-\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{6}}{\left[s + \frac{1}{2}\right] - j\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{\left(-\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{6}\right)\left(\left[s + \frac{1}{2}\right] - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{6}\right)\left(\left[s + \frac{1}{2}\right] + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 - (j)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \left[ \left(-\frac{1}{2} + \frac{j\sqrt{3}}{6}\right)\left(s + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{j\sqrt{3}}{6}\right)\left(s + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \left[ \underbrace{-\frac{1}{2}s}_{\sim} - \underbrace{\frac{1}{4}}_{\sim} + \cancel{\frac{j\sqrt{3}}{4}} + \cancel{s\frac{j\sqrt{3}}{6}} + \cancel{\frac{j\sqrt{3}}{12}} + \frac{3}{12} + \underbrace{-\frac{1}{2}s}_{\sim} - \underbrace{\frac{1}{4}}_{\sim} - \cancel{\frac{j\sqrt{3}}{4}} - \cancel{s\frac{j\sqrt{3}}{6}} - \right.$$

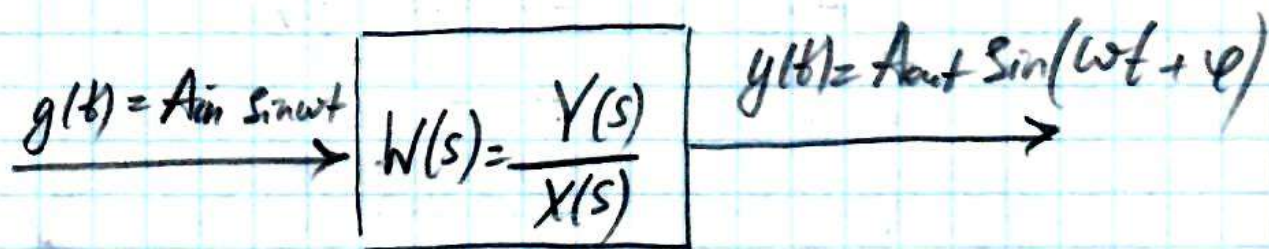
$$\left. - \cancel{\frac{j\sqrt{3}}{12}} + \frac{3}{12} \right] = \frac{1}{s} + \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \cdot \left[ -s - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{s} + \frac{s + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{s} + \frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{s} + \frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} -$$

$$- \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} ; h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} \Rightarrow h(t) = 1 + e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

# Лекция 4

## Частотные характеристики САУ



Преобразование Фурье

Преобразование Лапласа

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$s = j\omega$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

$\leftarrow$   
наоборот

Частотная передаточная функция

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

$$s = j\omega$$

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

$$P(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega) \quad Q(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega)$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{A_{out}}{A_{in}} \quad \varphi(\omega) = \arg W(j\omega)$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2}$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

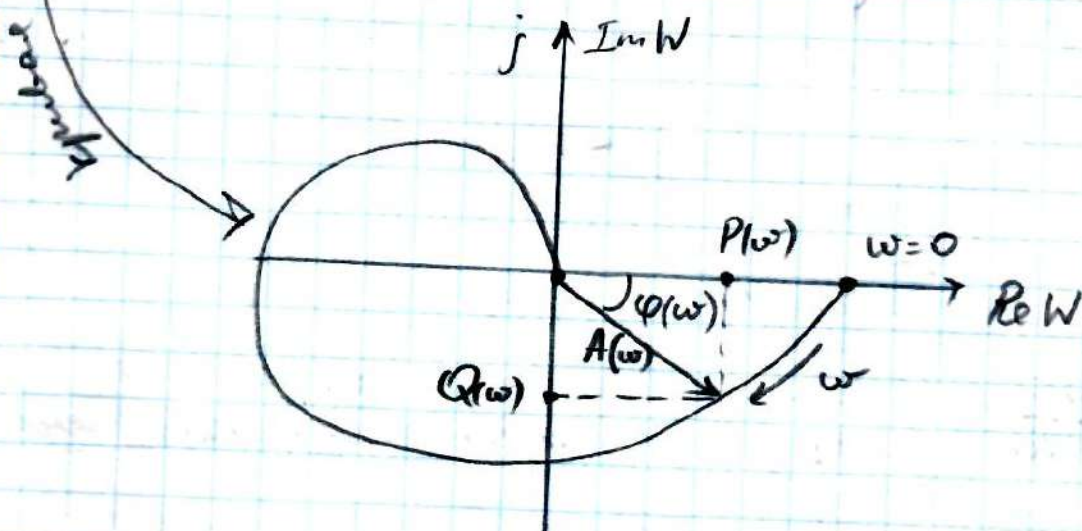
$$P(\omega) = A(\omega) \cos \varphi(\omega)$$

$$Q(\omega) = A(\omega) \sin \varphi(\omega)$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика

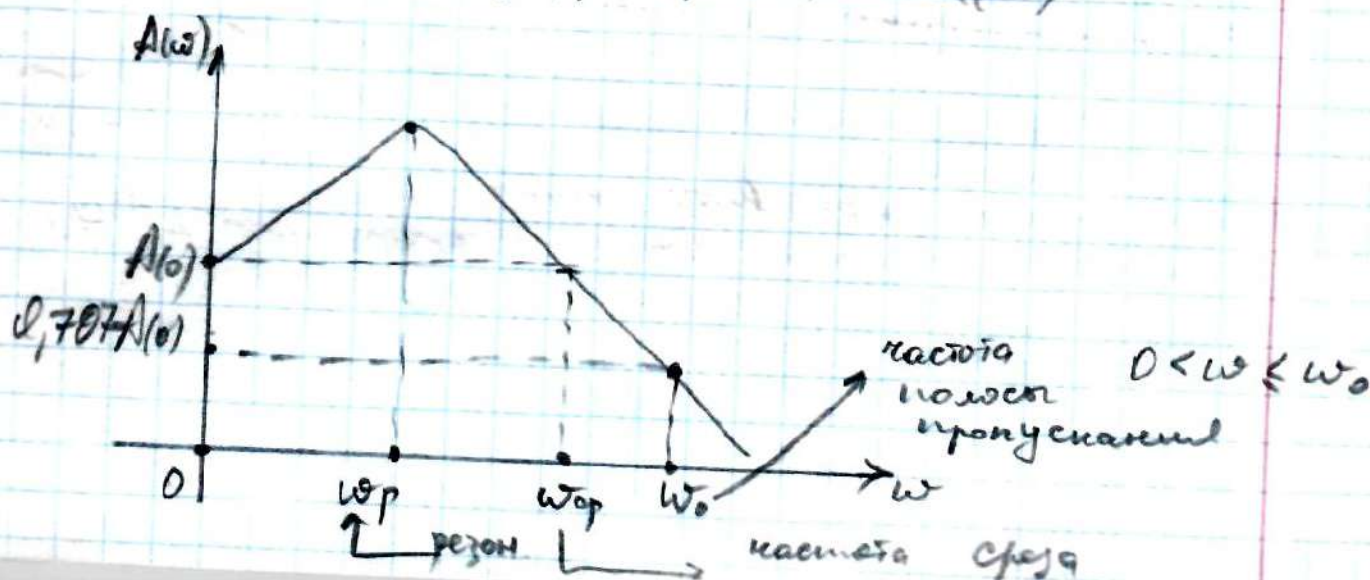
АФЧХ - график Найквиста

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$



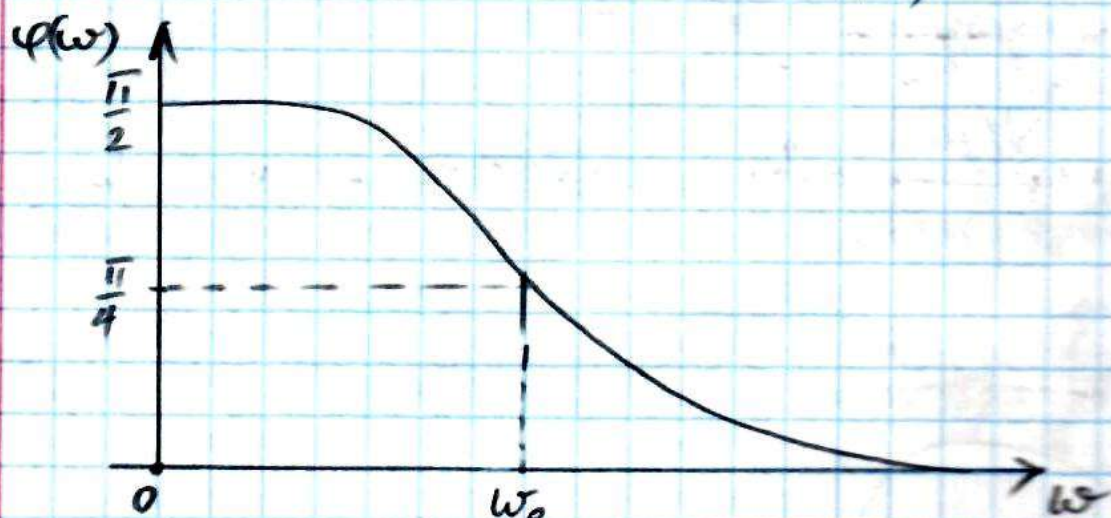
Амплитудно-частотная характеристика

$$K(\omega) = \frac{A_{out}}{A_{in}} = |W(j\omega)| = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2}$$



## Разоматывае Хар-к 9

$$\varphi(\omega) = \arg V(j\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$



Пример 1.

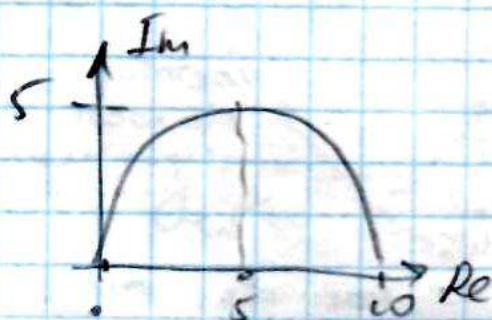
$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{10s}{s+1}$$

определить частотные  
характеристики звена

Частотная передаточная ф-ция

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{10j\omega}{j\omega+1} = \frac{10j\omega(j\omega-1)}{(j\omega)^2-1} = \frac{-10\omega^2-10j\omega}{-\omega^2-1} = \\ &= \frac{-(10\omega^2+10j\omega)}{-(\omega^2+1)} = \frac{10\omega^2}{1+\omega^2} + \frac{10j\omega}{1+\omega^2} = \underbrace{\frac{10\omega^2}{1+\omega^2}}_P + j \underbrace{\frac{10\omega}{1+\omega^2}}_{Q} \end{aligned}$$

Далее нужно подставить некоторые  
значения величины  $\omega$  и получить АЧХ

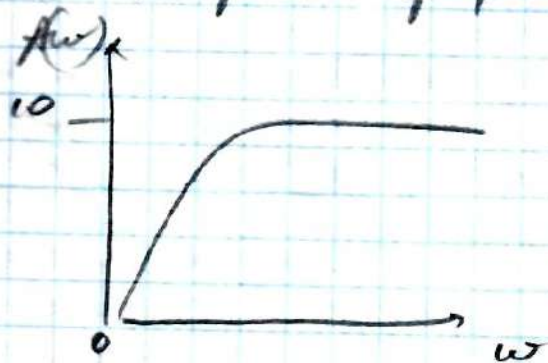


качественно:

Амплитудно-частотная характеристика

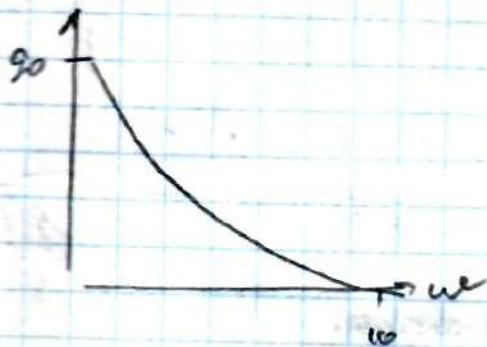
$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \left| \frac{10j\omega}{j\omega + 1} \right| = \frac{|10j\omega|}{|1 + j\omega|} = \frac{|0 + j10\omega|}{|1 + j\omega|} = \frac{\sqrt{(10\omega)^2}}{\sqrt{1 + \omega^2}} = \frac{10\omega}{\sqrt{1 + \omega^2}}$$

Далее нужно подставить некоторые значения  $\omega$  и построить график



Фазочастотная характеристика

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arg \left( \frac{10j\omega}{j\omega + 1} \right) = \arg 10j\omega - \arg(j\omega + 1) = \arctg \left( \frac{10\omega}{0} \right) - \arctg \frac{\omega}{1} = \frac{\pi}{2} - \arctg \omega$$



[лексика]

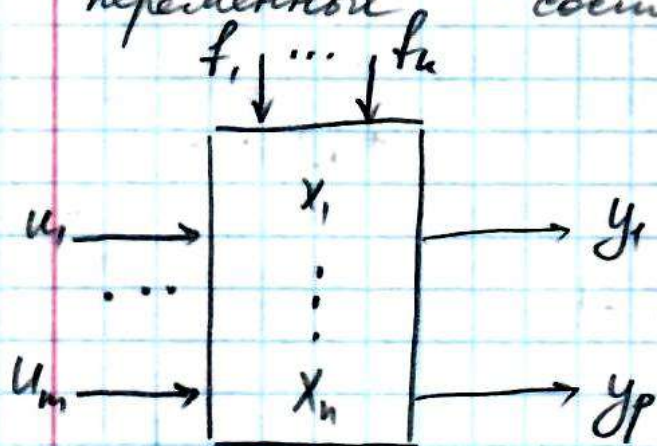
## Модели в переменных состояний

Пространство состояний — один из основных методов описания свойств динамической системы в теории управления. Движение системы в пространстве описывает изменение ее состоя-  
ния

Пространство состояний обычно называют фазовым пространством динамической системы — а траекторию движения точки, изображающей в этом пространстве, фазовой траекторией

В пространстве состояний с помощью диф. ур-в первого порядка строят модель систем автоматического регулирования. Они записываются в матричном виде.

В качестве переменных этих уравнений рассматриваются входные, выходные переменные и переменные состояния системы



Уравнение состояния объекта

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + B \cdot u(t) + F(t)$$

Уравнение выхода

$$Y(t) = C \cdot X(t) + D \cdot u(t) + g(t)$$

$\overline{X(t)}$  — переменные состояния системы

$\overline{u(t)}$  — сигналы управления

$\overline{f(t)}$  — возмущение на входе системы

$\overline{y(t)}$  — выходные сигналы системы

$\overline{y(t)}$  - возмущения на выходе системы

$A$  - матрица системы

$B$  - матрица управления

$C$  - матрица выхода по состоянию

$D$  - матрица выхода по управлению

$b$  единственное число.

$$\begin{cases} \overline{x^{(i)}(t)} = A \cdot \overline{x(t)} + \overline{b} \cdot \overline{u(t)} + \overline{f(t)} \\ \overline{y(t)} = \overline{c} \cdot \overline{x(t)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{a_p s^p + a_{p-1} s^{p-1} + \dots + a_0}$$

$$\begin{cases} \overline{x_i^{(i)}(t)} = \overline{x_{i+1}(t)}, \quad i=1, \dots, n-1 \\ \vdots \\ \overline{x_p^{(p)}(t)} = -\frac{1}{a_p} (a_{p-1} \overline{x_p(t)} + \dots + a_1 \overline{x_2(t)} + a_0 \overline{x_1(t)}) + \frac{1}{a_p} \overline{u(t)} \end{cases}$$

$$y(t) = b_m \overline{x_{m+1}(t)} + \dots + b_0 \overline{x_1(t)}$$

Пример 1. Даны функции из передаточной функции  $W(s)$  и передаточной функции  $U(s)$

$$W(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 2s + 3}{4s^3 + 5s^2 + s + 2}$$

Решение:

$$Y(s)(4s^3 + 5s^2 + s + 2) = (s^2 + 2s + 3)U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{s^2 + 2s + 3} = \frac{U(s)}{4s^3 + 5s^2 + s + 2} = X_1(s)$$

$$\frac{Y(s)}{s^2 + 2s + 3} = X_1(s) \quad \frac{U(s)}{4s^3 + 5s^2 + s + 2} = X_1(s)$$

$$X_1(s)(4s^3 + 5s^2 + s + 2) = U(s)$$

$$4s^3 X_1(s) + 5s^2 X_1(s) + s X_1(s) + 2 X_1(s) = U(s)$$

Умножаем  $L^{-1}$

$$4 X_1^{(3)}(t) + 5 X_1^{(2)}(t) + X_1^{(1)}(t) + 2 X_1(t) = u(t)$$

$$\begin{cases} X_2(t) = X_1^{(1)}(t) \\ X_3(t) = X_1^{(2)}(t) = X_2^{(1)}(t) \end{cases} ; \quad X_3^{(1)}(t) = X_2^{(2)}(t) = X_1^{(3)}(t)$$

$$\begin{cases} X_1^{(1)}(t) = X_2(t) \\ X_2^{(1)}(t) = X_3(t) \end{cases} ; \text{ Перепишем уравнение с учётом замены:}$$

$$4 X_3^{(1)}(t) + 5 X_3(t) + X_2(t) + 2 X_1(t) = u(t)$$

$$X_3^{(1)}(t) = \frac{1}{4} u(t) - \frac{5}{4} X_3(t) - \frac{1}{4} X_2(t) + \frac{2}{4} X_1(t)$$

$$x_3^{(2)} = \frac{1}{4} (2x_1(t) - \frac{5}{4}x_3(t) - x_2(t)) + \frac{1}{4}u(t)$$

Уравнение состояния обобща в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -0,5 & -0,25 & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,25 \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

$$\frac{y(s)}{s^2 + 2s + 3} = x_1(s)$$

$$s^2 x_1(s) + 2s x_1(s) + 3x_1(s) = y(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} x_1^{(2)}(t) + 2x_1^{(1)}(t) + 3x_1(t) = y(t)$$

$$\begin{cases} x_2(t) = x_1^{(1)} \\ x_3(t) = x_1^{(2)} = x_2^{(1)} \end{cases}$$

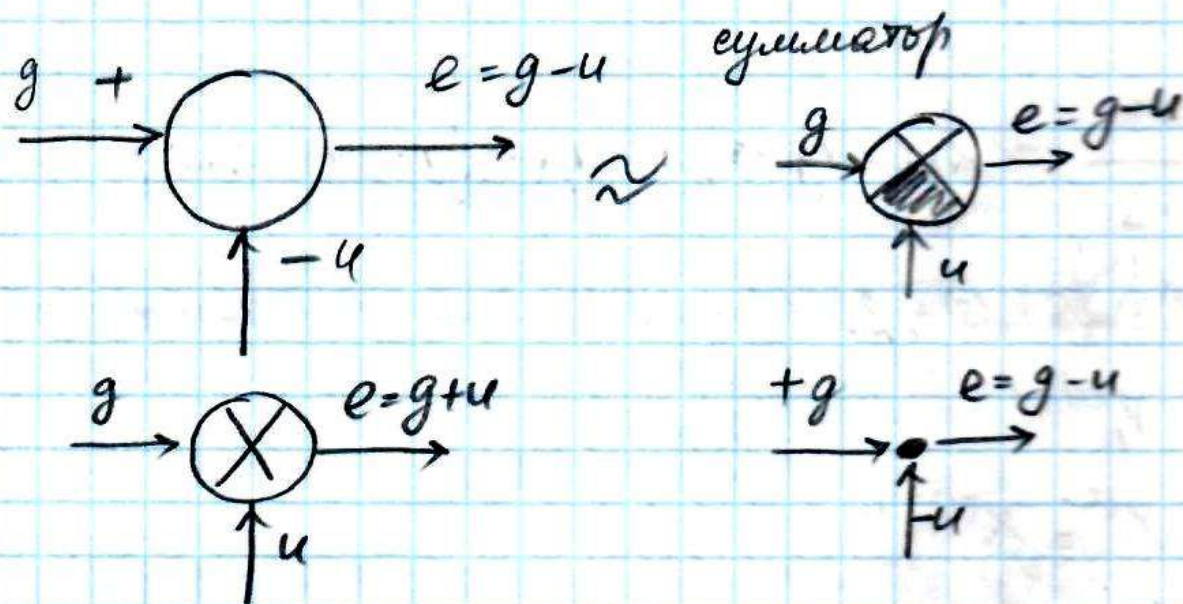
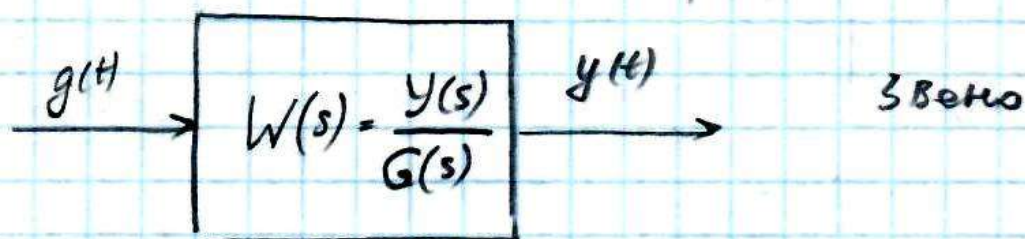
Уравнение выхода составим в матричной форме:

$$x_3(t) + 2x_2(t) + 3x_1(t) = y(t)$$

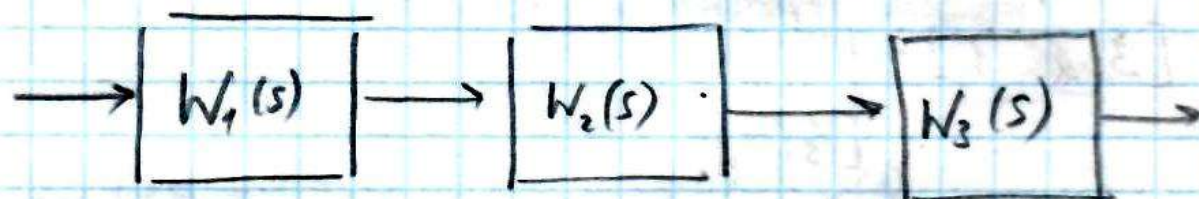
$$y(t) = [3 \ 2 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}$$

# лекция 6

## Структурные схемы САУ

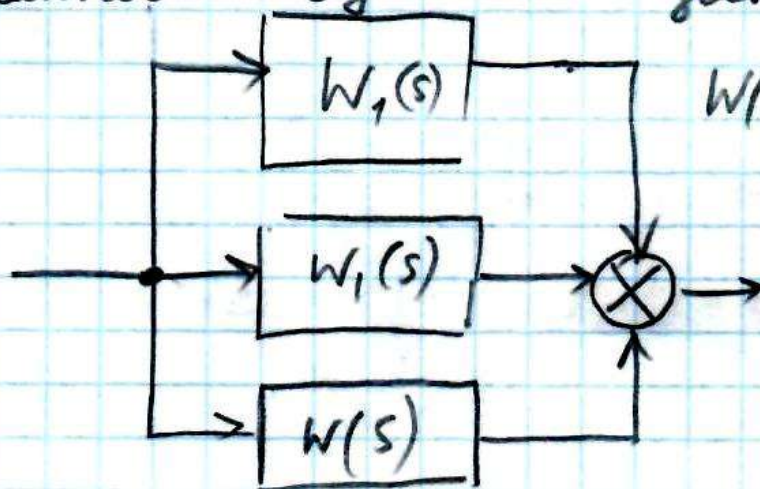


последовательное соединение звеньев:



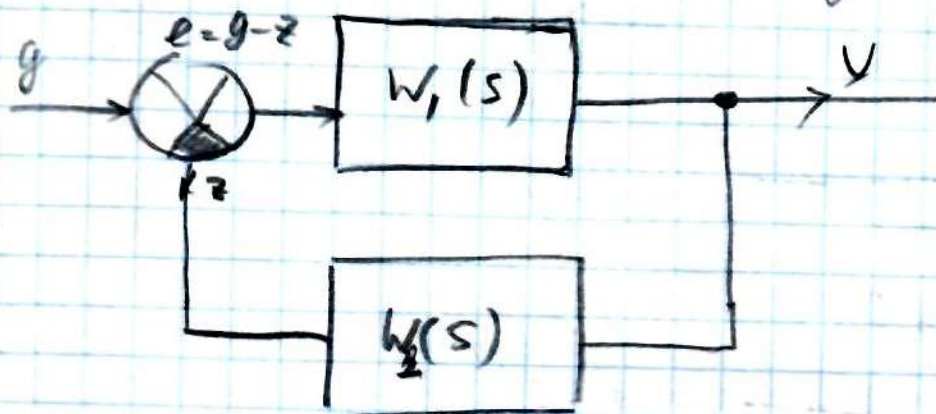
$$W(s) = W_1(s) \cdot W_2(s) \cdot W_3(s)$$

параллельное соединение звеньев



$$W(s) = W_1(s) + W_2(s) + W_3(s)$$

Внутреннее параметрическое соотношение (обратная связь)



$$y = W_1(s)e = W_1(s)(g - z) = W_1(s)(g - W_2(s)y)$$

$$z = W_2(s)y$$

$$W(s) = \frac{y}{g} = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}$$

$$y = W_1(s)(g - W_2(s)y)$$

$$y = W_1(s)g - W_1(s)W_2(s)y$$

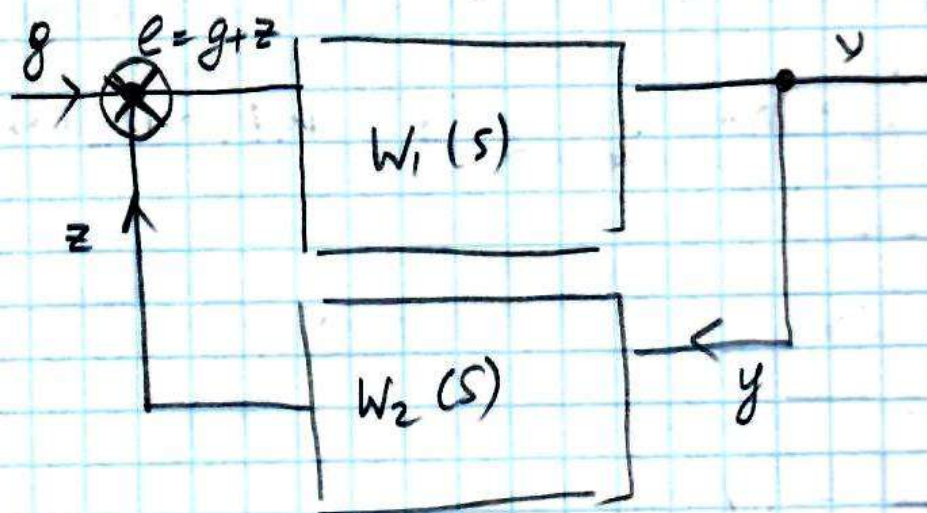
$$y + W_1(s)W_2(s)y = W_1(s)g$$

$$y(1 + W_1(s)W_2(s)) = W_1(s)g$$

$$\frac{y}{g}(1 + W_1(s)W_2(s)) = W_1(s)$$

$$\frac{y}{g} = \frac{W_1(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)}$$

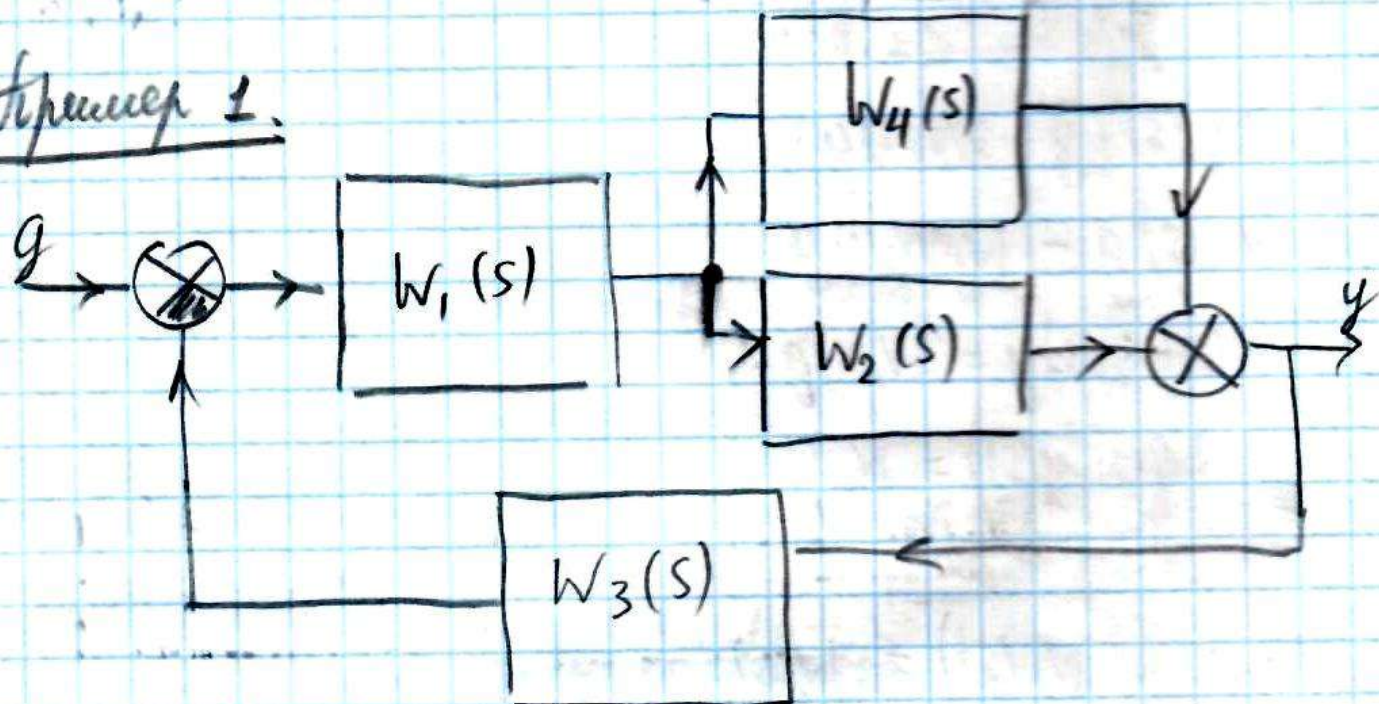
## Положительная обратная связь



$$y = W_1(s)e = W_1(s)(g + z) = W_1(s)(g + W_2(s)y)$$

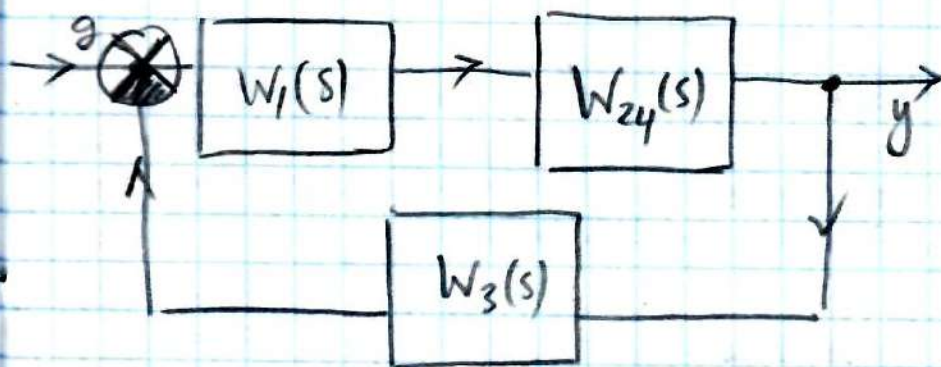
$$z = W_2(s)y \quad W(s) = \frac{y}{g} = \frac{W_1(s)}{1 - W_1(s)W_2(s)}$$

## Пример 1.

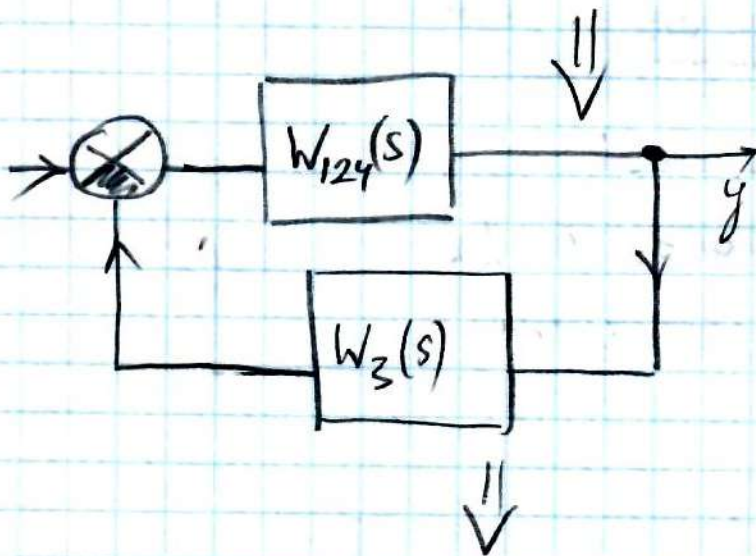


$$W_{24}(s) = W_2(s) + W_4(s) \quad \text{т.к. ветви } W_2 \text{ и } W_4 \text{ параллельны}$$

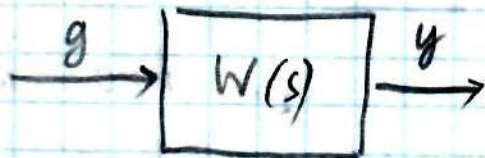




$$W_1(s) \cdot W_{24}(s) = W_{124}(s)$$



$$W(s) = \frac{W_{124}(s)}{1 + W_{124}(s) W_3(s)}$$

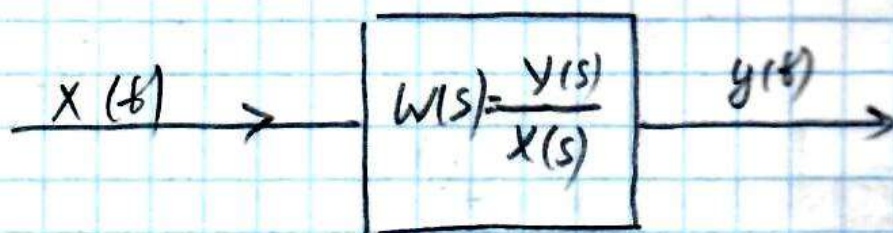


$$W(s) = \frac{W_1(s) W_{24}(s)}{1 + W_1(s) W_{24}(s) W_3(s)} = \frac{W_1(s) (W_2(s) + W_4(s))}{1 + W_1(s) (W_2(s) + W_4(s)) W_3(s)}$$

# Типовые звенья

## Лекция 7

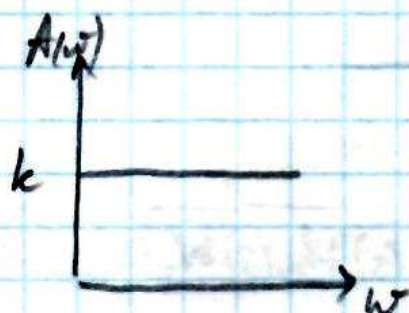
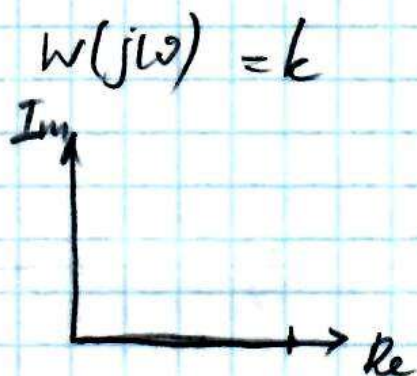
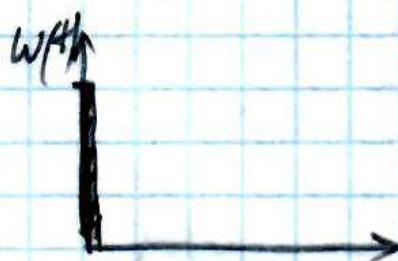
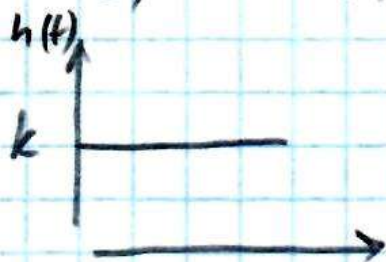
Динамическое звено - уст-ва, физическая природа и принципы конструктивного исполнения к-рых различны, но характеризуются определённым одним диф. урав.



1. Пропорциональное звено  $y = kx$ ,  $W(s) = k$

$$h(t) = k \cdot 1(t)$$

$$W(t) = k \cdot \delta(t)$$



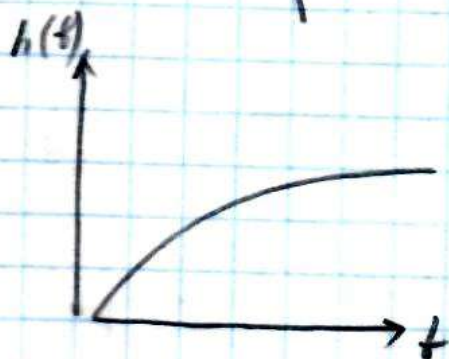
$$A(\omega) = k$$
$$\varphi(\omega) = 0$$

2. Инерционное звено (априорическое 1-порядка)

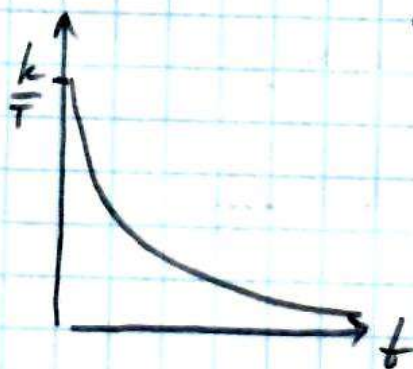
$$T \frac{dy}{dt} + y = kx$$

$$W(s) = \frac{k}{Ts + 1}$$

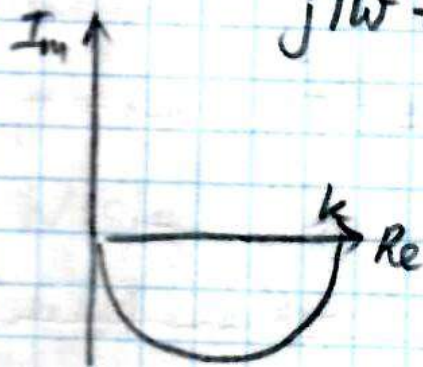
$$h(t) = k \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right)$$



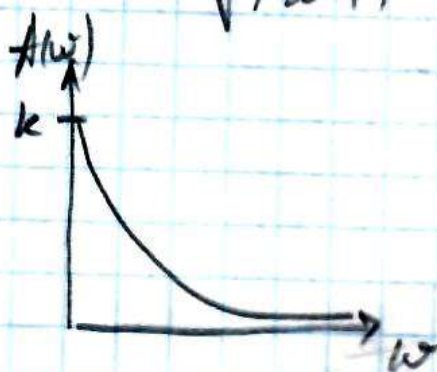
$$w(t) = h'(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$



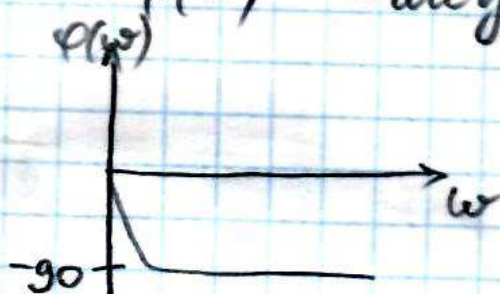
$$W(j\omega) = \frac{k}{jT\omega + 1}$$



$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}$$

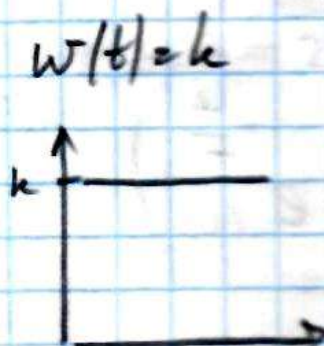
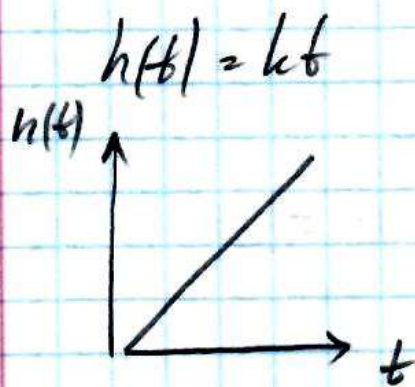


$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega T)$$

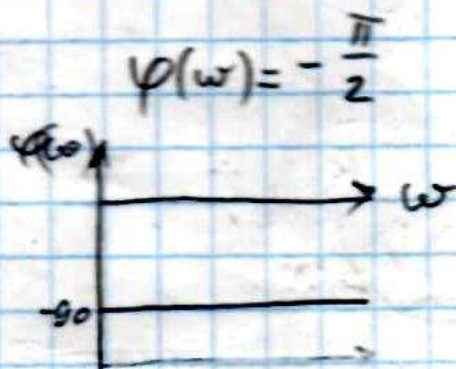
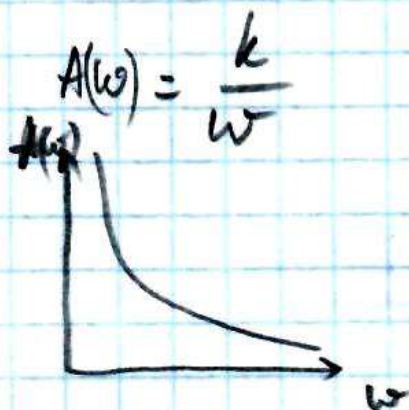


3. Интегральный элемент  
 $y = k \int_0^t x dt$

$$W(s) = \frac{k}{s}$$



$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega}$$

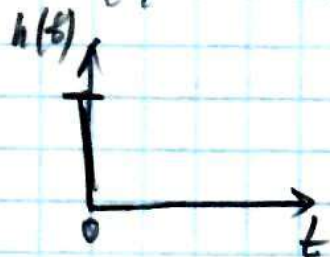


#### 4. Дифференциальное звено

$$y = k \frac{dx}{dt}$$

$$W(s) = k s$$

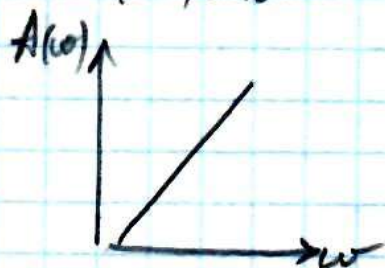
$$h(t) = k \cdot \delta(t)$$



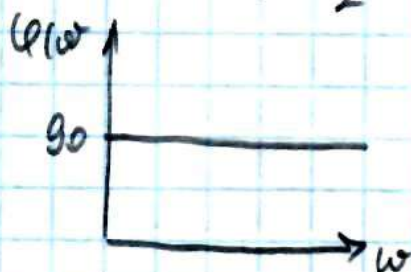
$$w(t) = k \frac{d\delta(t)}{dt}$$



$$A(\omega) = k\omega$$



$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$$

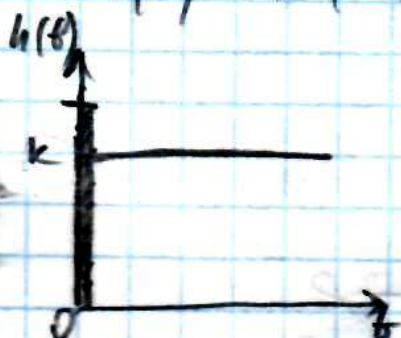


#### 5. Пропорциональное - дифференциальное звено

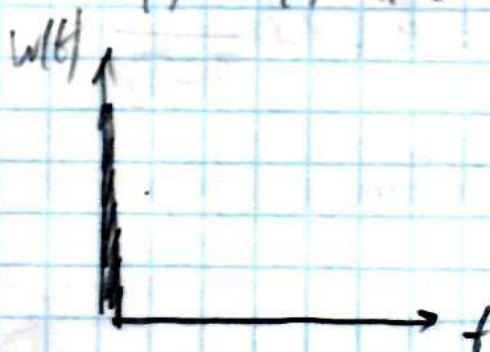
$$y = kx + k_x \frac{dx}{dt} = k(x + \tau \cdot \dot{x})$$

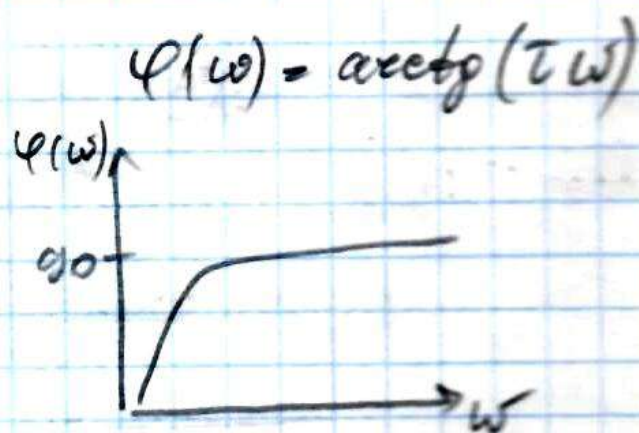
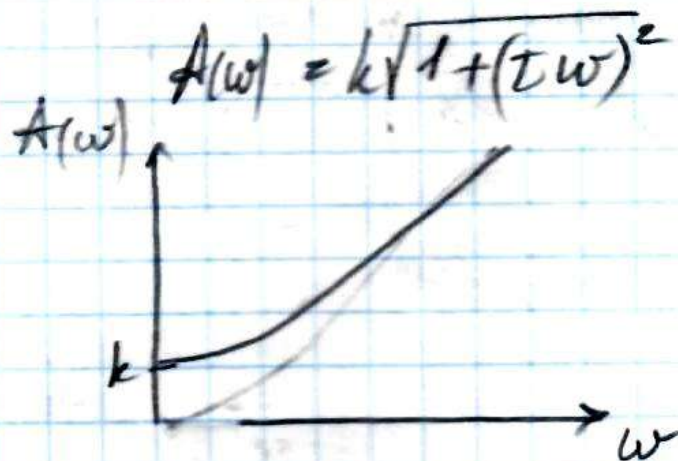
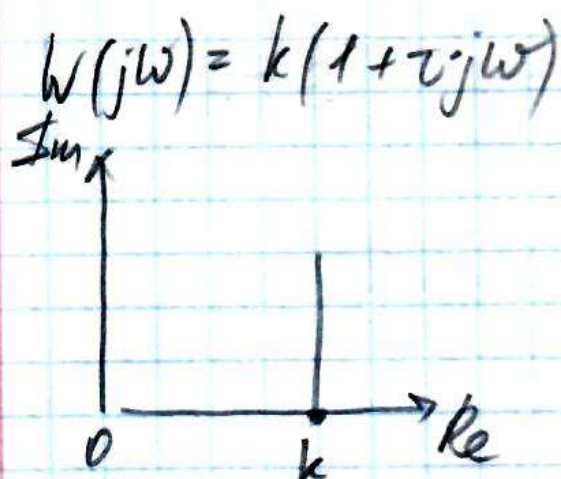
$$W(s) = k(1 + \tau \cdot s)$$

$$h(t) = k(1 + \tau \cdot \delta(t))$$



$$w(t) = h'(t) = k \cdot \tau \frac{d\delta(t)}{dt}$$





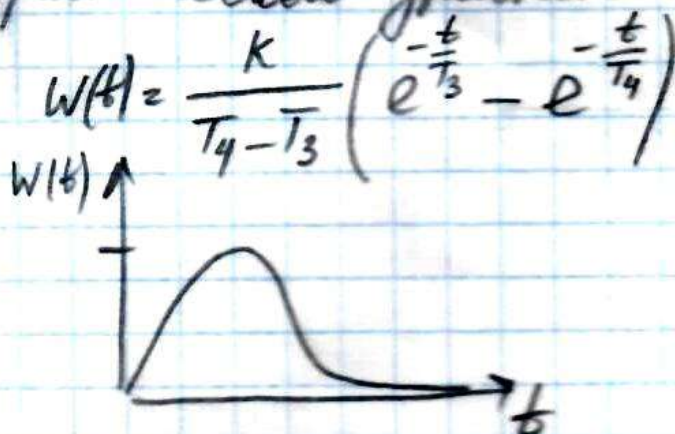
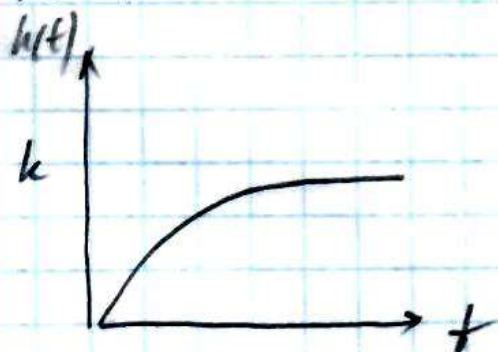
6. Аперiodическое звено 2-го порядка

$$T_1 \ddot{y} + T_2 \dot{y} + y = kx$$

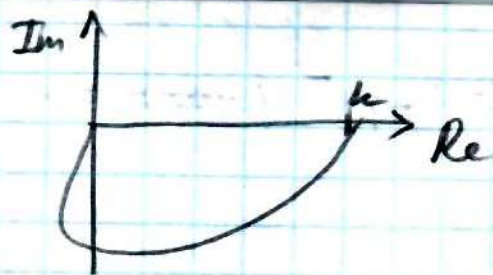
$$W(s) = \frac{k}{T_1 s^2 + T_2 s + 1} = \frac{k}{(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)}$$

$$h(t) = k \left( 1 + \frac{T_3}{T_4 - T_3} e^{-\frac{t}{T_3}} + \frac{T_4}{T_4 - T_3} e^{-\frac{t}{T_4}} \right)$$

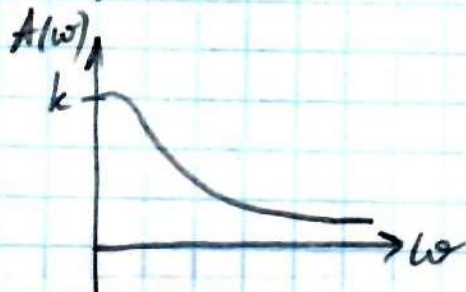
если корни характеристического уравнения  $\text{Re};$   
то:



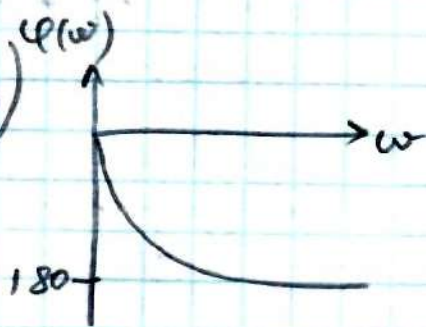
$$W(j\omega) = \frac{k}{(j\omega T_3 + 1)(j\omega T_4 + 1)}$$



$$A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1+(T_3\omega)^2} \sqrt{1+(T_4\omega)^2}}$$



$$\varphi(\omega) = -\arctg(\omega T_3) - \arctg(\omega T_4)$$



7. Колебательное звено

$$T \ddot{y} + 2\xi T \dot{y} + y = k \cdot x ; 0 < \xi < 1$$

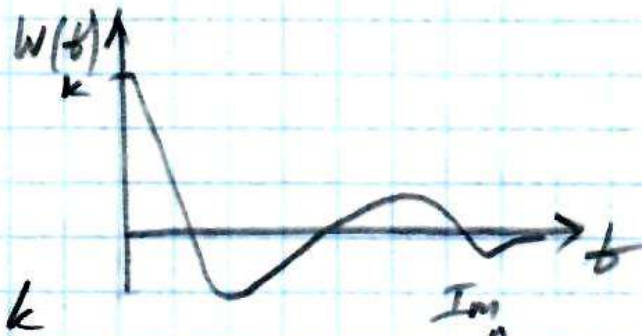
↑  
коэф. демпфирования

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1}$$

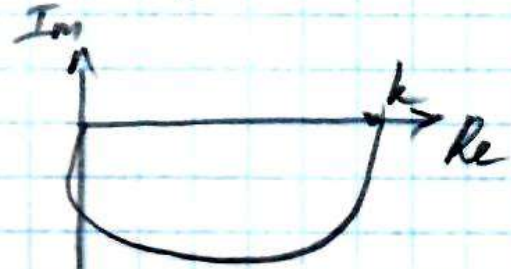
$$h(t) = k \left( 1 - e^{-\frac{\xi t}{T}} \left[ \cos \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t \right] \right)$$



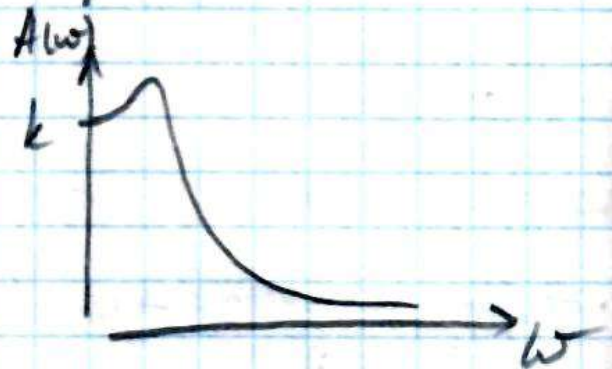
$$w(t) = \frac{2}{T} e^{\frac{\xi t}{T}} \left( \frac{\xi^2}{\sqrt{1-\xi^2}} - \sqrt{1-\xi^2} \right) \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t$$



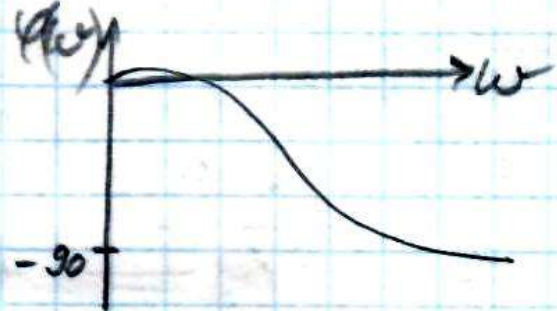
$$W(j\omega) = \frac{k}{-T^2\omega^2 + dj\xi T\omega + 1}$$



$$A(\omega) = \frac{k}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4(\xi T\omega)^2}$$



$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2}$$

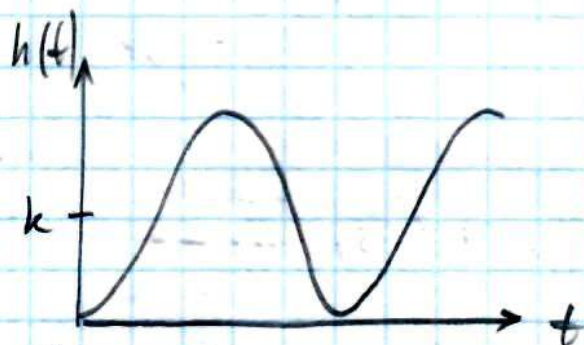


# 8. Консервативная звено

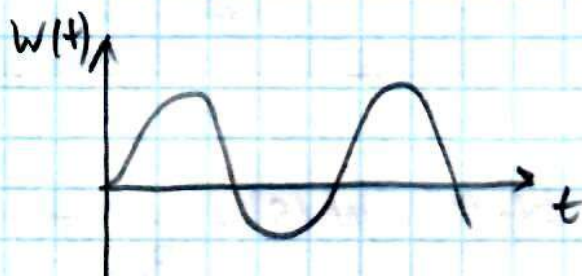
$$T^2 \ddot{y} + y = kx, \quad \xi = 0$$

$$W(s) = \frac{k}{T^2 s^2 + 1}$$

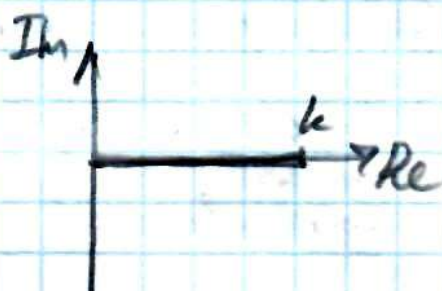
$$h(t) = k \left( 1 - \cos \frac{t}{T} \right)$$



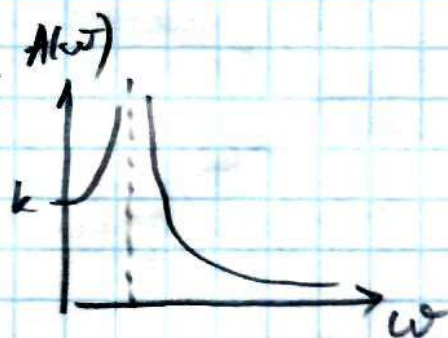
$$w(t) = k \sin \frac{t}{T}$$



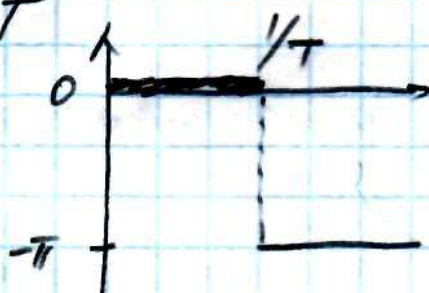
$$W(j\omega) = \frac{k}{-T^2 \omega^2 + 1}$$



$$A(\omega) = \frac{k}{|1 - T^2 \omega^2|} = \frac{k}{1 - T^2 \omega^2}$$



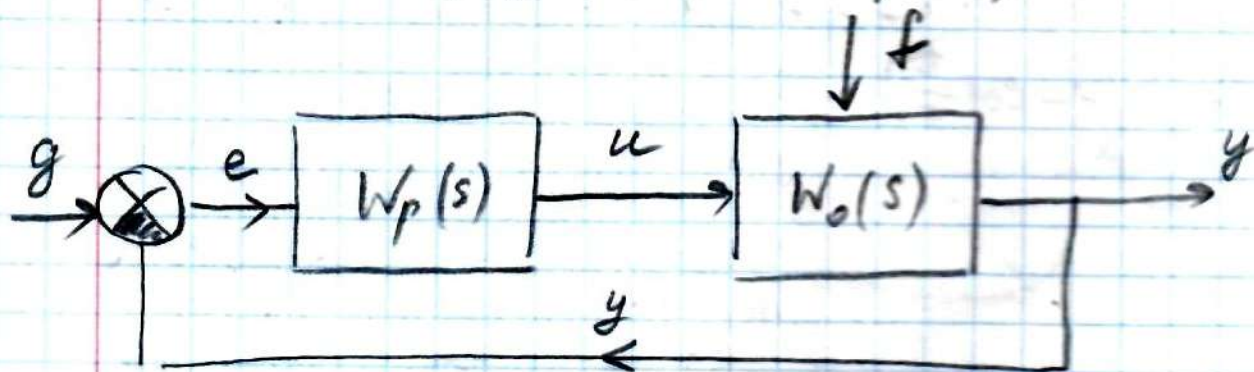
$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 < \omega < 1/T \\ -\pi, & 1/T < \omega \end{cases}$$



# Основы устойчивости

лекция 8

Устойчивость - св-во системы воз-  
вращаться в состояние,  
заданное оператором.



$$W(s) = W_p(s) \cdot W_o(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Приравняем знаменатель к 0

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad n > m$$

Условия устойчивости.

Условие необходимости:  $a_n > 0, a_{n-1} > 0, \dots, a_1 > 0, a_0 > 0$

Условие достаточности:  $s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n$   
 $\text{Re}(s_i) < 0$

Система устойчива: условие необходимости  
и достаточности  
выполнены

Система находится на  
границе устойчивости, если не  
выполнены  
условия достаточности

Реальный оператор  
Реальный дифференциатор  
Можно было было  
было можно замечать

### Задача 1

$$W(s) = \frac{s+2}{4s^2+5s+1}$$

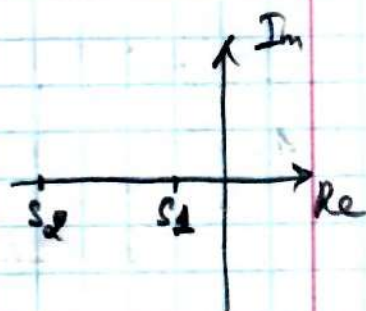
$$A(s) = 4s^2 + 5s + 1 = 0; a_1 = 4 > 0; a_2 = 5 > 0; a_3 = 1 > 0$$

$$4s^2 + 5s + 1 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9$$

$$s_1 = \frac{-5+3}{8}; \quad s_2 = \frac{-5-3}{8}$$

$$s_1 = -\frac{1}{4}; \quad s_2 = -1$$



### Задача 2

$$W(s) = \frac{s+5}{s^2+3s+3}; \quad a_1 = 1 > 0; a_2 = 3 > 0; a_3 = 3 > 0$$

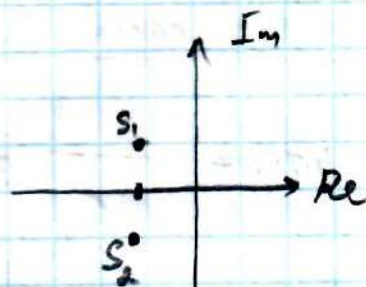
$$A(s) = s^2 + 3s + 3 = 0$$

$$D = 9 - 12 = -3$$

$$s_1 = \frac{-3+\sqrt{-3}}{2}; \quad s_2 = \frac{-3-\sqrt{-3}}{2}$$

$$s_1 = -\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$s_2 = -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$



корни "чужие"  
CPY yamoi rubrai

Критерии исследования устойчивости САУ  
через условия устойчивости:

$$A(s) = s^5 + 7s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 6s + 2 = 0$$

Решить уравнение 5-го порядка аналитически  
не представляется возможным.

⇓

Разработаны критерии устойчивости:

Алгебраические критерии:

- Критерий Гурвица
- Критерий Рауса
- Критерий Зурова

Графо-аналитические:

- критерий Михайлова
- критерий Найквиста

Лекция 9

Критерий Гурвица (1895 Адольф Гурвиц)

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Определяется из характеристической полинома

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

Критерий Гурвица: для устойчивости линей-  
ной САУ необходимо и достаточно  
чтобы все  $n$  диагональные миноры

матрицы Гурвица были положительными,  
 $n$  - порядок характеристического полинома.

### Матрица Гурвица

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_{n-1} > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} > 0$$

$$\dots \Delta_n = a_0 \cdot \Delta_{n-1} > 0$$

# Задача 1.

$$W(s) = \frac{4s + 3}{s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 3}$$

$$A(s) = s^4 + 4s^3 + 6s^2 + 4s + 3$$

$$H = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = 4 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 24 - 4 = 20 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 \cdot 4 + 4 \cdot 0 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \cdot 0 - (0 \cdot 6 \cdot 0 + 1 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 \cdot 3) = 96 + 0 + 0 - (0 + 16 + 48) = 32 > 0$$

$$\Delta_4 = 3 \cdot \Delta_3 = 32 \cdot 3 = 96 > 0,$$

Пример 2

$$W(s) = \frac{1+s}{5s^3+2s^2+s+2}$$

$$A(s) = 5s^3+2s^2+s+2$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = 2 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 10 = -8$$

система неустойчива

линий 10

Критерий Михайлова 1938

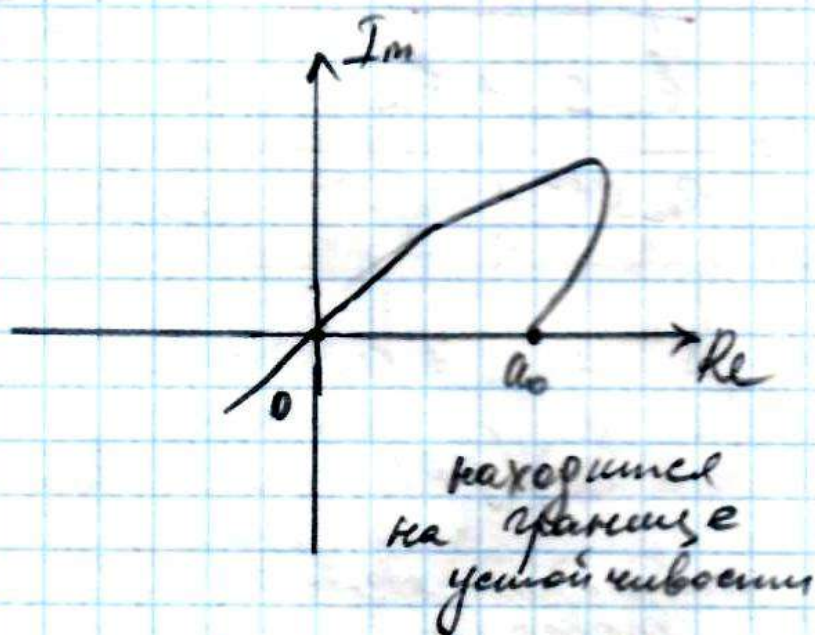
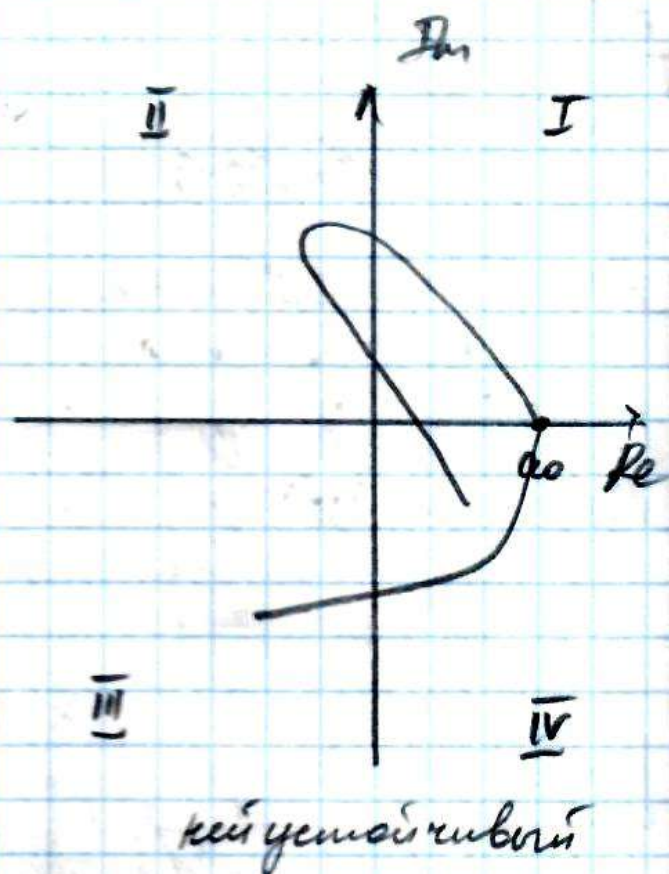
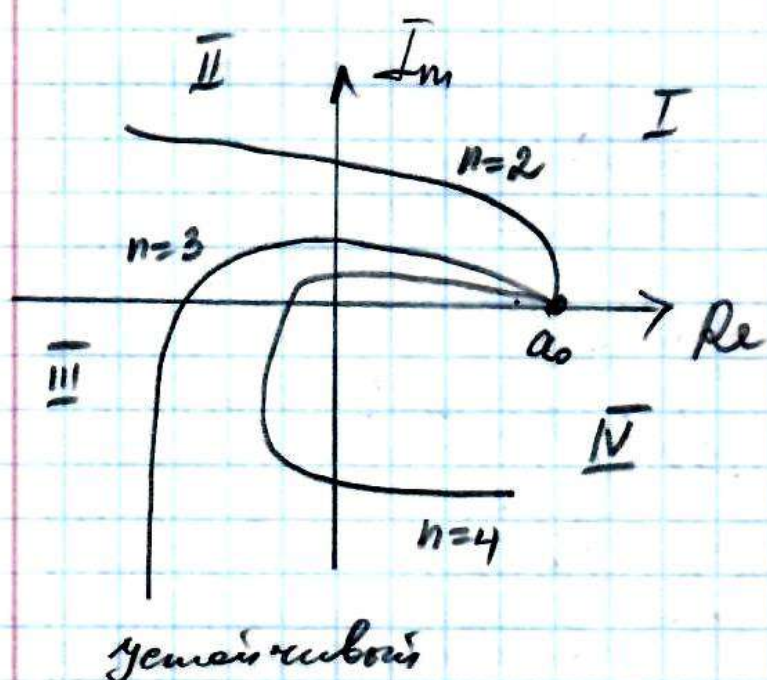
$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \quad ; \quad s = j\omega$$

$$A(j\omega) = a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0 = X(\omega) + jY(\omega)$$

Для того, чтобы линейная СЧУ была устойчивой, годограф Михайлова  $A(j\omega)$  должен начинаться на правой действительной полуоси комплексной плоскости и последовательно пересекать  $n$  квадрантов комплексной плоскости против часовой стрелки.

$n$ -порядок характеристического полинома



Пример 1.

$$W(s) = \frac{4s+3}{s^3+2s^2+3s+3}$$

$$A(s) = s^3+2s^2+3s+3$$

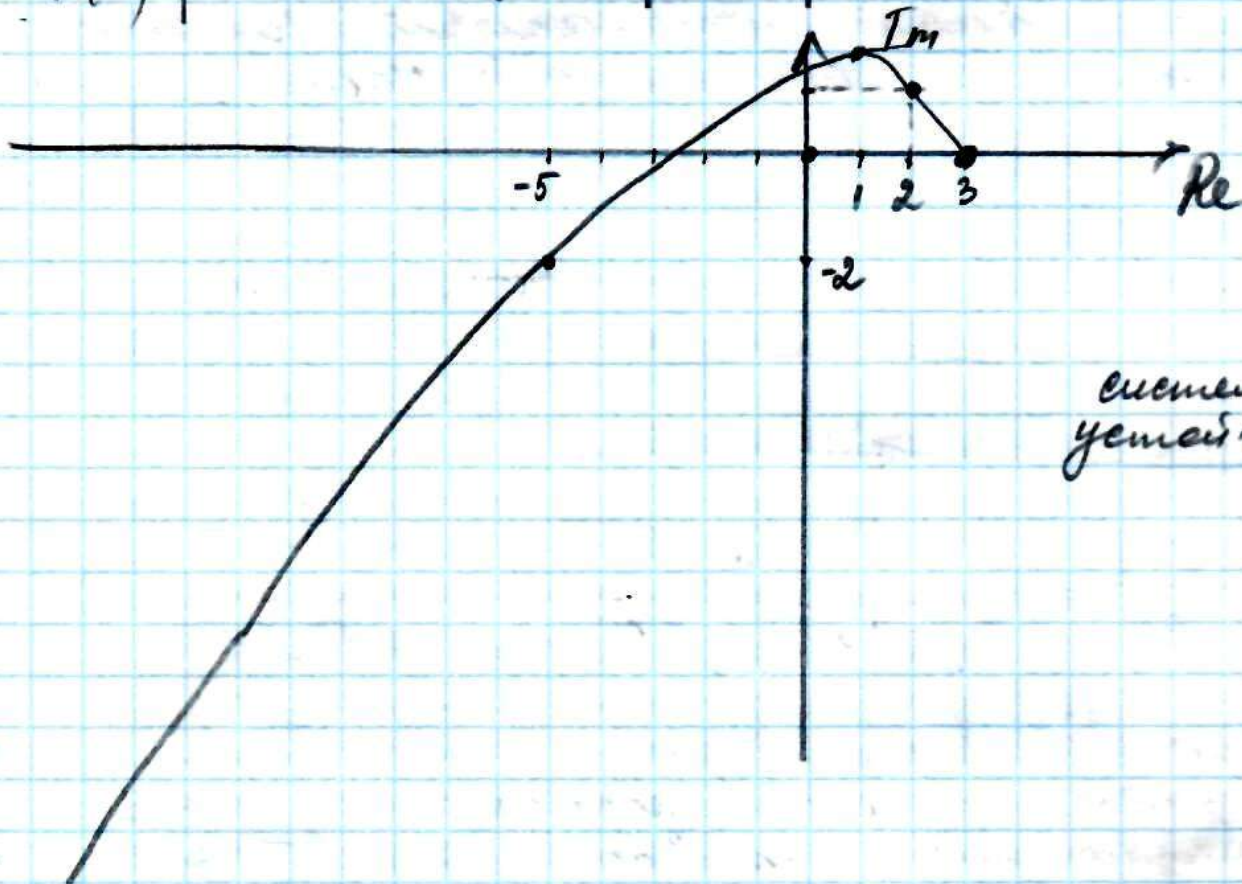
$$A(j\omega) = (j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 3j\omega + 3$$

$$A(j\omega) = -j\omega^3 - 2\omega^2 + j3\omega + 3$$

$$\operatorname{Re} A = -2\omega^2 + 3$$

$$\operatorname{Im} A = -\omega^3 + 3\omega$$

| $\omega$    | 0 | 0.5   | 1 | 2  | 5    | 10   |
|-------------|---|-------|---|----|------|------|
| $X(\omega)$ | 3 | 2     | 1 | -5 | -47  | -197 |
| $Y(\omega)$ | 0 | 1.375 | 2 | -2 | -110 | -970 |

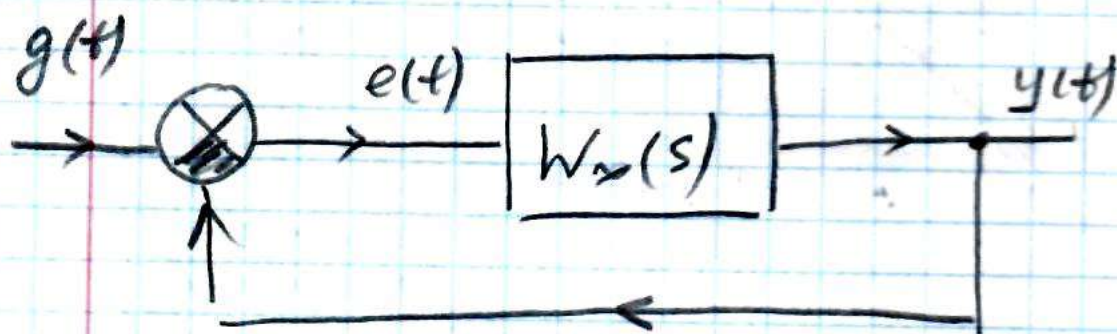


система  
устойчива

# Критерий Найквиста

Г. Найквист 1932

1. Критерий Найквиста предназначен только для определения устойчивости замкнутых САУ
2. Устойчивость замкнутой САУ определяется амплитудно-фазовой характеристикой её разомкнутой части.

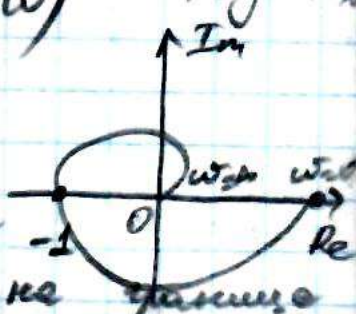
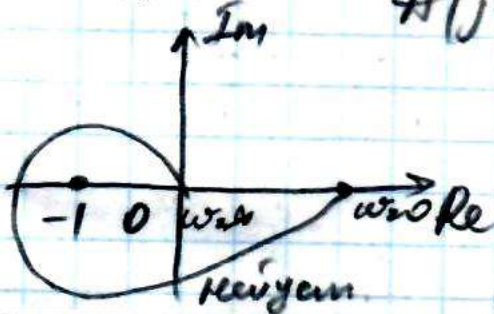
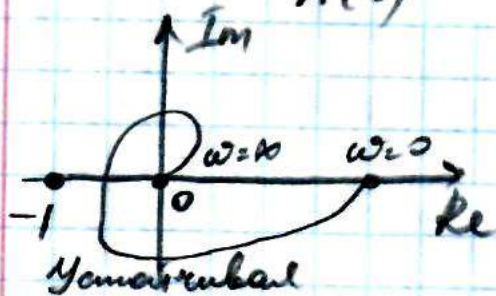


$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

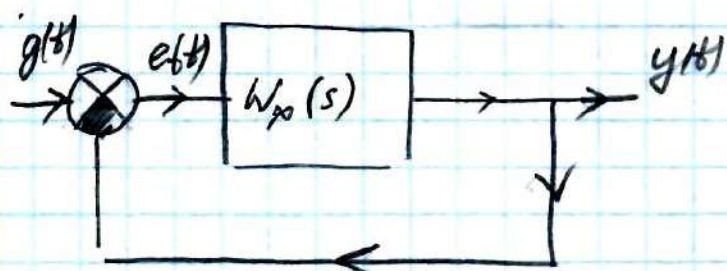
Критерий Найквиста: для устойчивости замкнутой системы достаточно, чтобы при изменении частоты от 0 до  $\infty$  амплитудно-фазовая характеристика её разомкнутой части на комплексной плоскости не охватывала точку с координатами  $(-1, j0)$

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \xrightarrow{s=j\omega}$$

$$W(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = \text{Re } W + j \text{Im } W$$



### Пример 1:



$$W(s) = \frac{s+2}{2s^2+3s+1}$$

1. Разомкнутая цепь должна быть устойчивой, проверим с помощью критерия Гурвица.

$$A(s) = 2s^2 + 3s + 1 = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = 3 > 0$$

$$\Delta_2 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 = 3 > 0$$

2. Составление амплитудно-фазовой характеристики

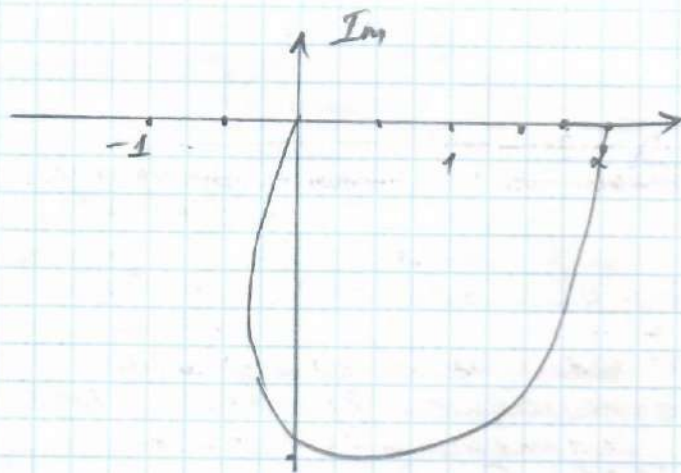
$$W_0(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{2(j\omega)^2 + 3j\omega + 1} = \frac{2 + j\omega}{-2\omega^2 + 1 + 3j\omega} =$$

$$= \frac{(2 + j\omega)(-2\omega^2 + 1 - 3j\omega)}{(-2\omega^2 + 1 + 3j\omega)(-2\omega^2 + 1 - 3j\omega)} = \frac{2 - \omega^2 - j(2\omega^3 + 5\omega)}{(-2\omega^2 + 1)^2 + 9\omega^2}$$

$$X(\omega) = \operatorname{Re} W_0 = \frac{2 - \omega^2}{(-2\omega^2 + 1)^2 + 9\omega^2}$$

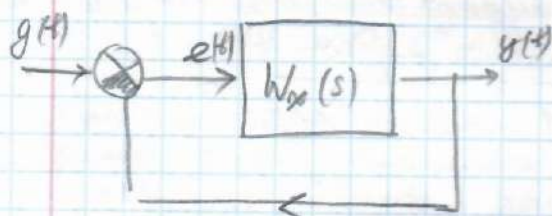
$$Y(\omega) = \operatorname{Im} W_0 = \frac{-2\omega^3 + 5\omega}{(-2\omega^2 + 1)^2 + 9\omega^2}$$

Составим значения  $\omega$ :



амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой цепи САУ не охватывает точку  $(-1, j0)$  поэтому замкнутая САУ устойчива

Пример 2:



$$W(s) = \frac{s+2}{4s^3+6s^2+s+1}$$

1. Разомкнутая цепь САУ по критерию Найквиста должна быть устойчивой. Условие Гурвица.

$$A(s) = 4s^3 + 6s^2 + s + 1$$

$$H = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_1 = 6 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 > 0$$

$$\Delta_3 = a_{33} \cdot \Delta_2 = 1 \cdot \Delta_2 = 1 \cdot 2 = 2$$

$$\Delta_3 \geq 2 \cdot 1 = 2 > 0$$

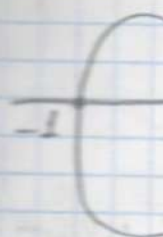
Amplitude

$$|G(j\omega)| = \frac{2}{-4j\omega^3}$$

$$|G(j\omega)| = |K| |W(j\omega)| =$$

$$|G(j\omega)| = |K| |W(j\omega)| =$$

$$|G(j\omega)| = |K| |W(j\omega)| =$$



Пример 11

Устойчивость системы

Устойчивость системы

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$

Устойчивость системы

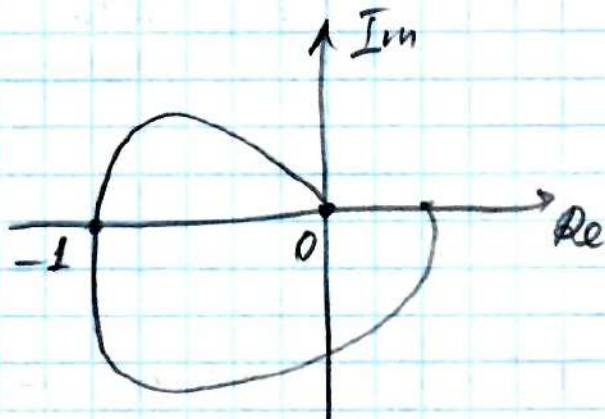
Разомкнутая часть усилителя.

$$W_{\text{до}}(j\omega) = \frac{2 + j\omega}{-4j\omega^3 - 6\omega^2 + j\omega + 1} = \frac{(2 + j\omega)(1 - 6\omega^2 - j(\omega - 4\omega^3))}{(1 - 6\omega^2 + j(\omega - 4\omega^3))(1 - 6\omega^2 - j(\omega - 4\omega^3))}$$

$$X(\omega) = \text{Re } W_{\text{до}} = \frac{2(1 - 6\omega^2) + \omega(\omega - 4\omega^3)}{(1 - 6\omega^2)^2 + (\omega - 4\omega^3)^2}$$

$$Y(\omega) = \text{Im } W_{\text{до}} = \frac{\omega(1 - 6\omega^2) - 2(\omega - 4\omega^3)}{(1 - 6\omega^2)^2 + (\omega - 4\omega^3)^2}$$

Подставим значение  $\omega$  и рассчитаем  $X$  и  $Y$



лекция 12

Формирование запаса устойчивости. Составление областей устойчивости методом D-разбиения

D-разбиение

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

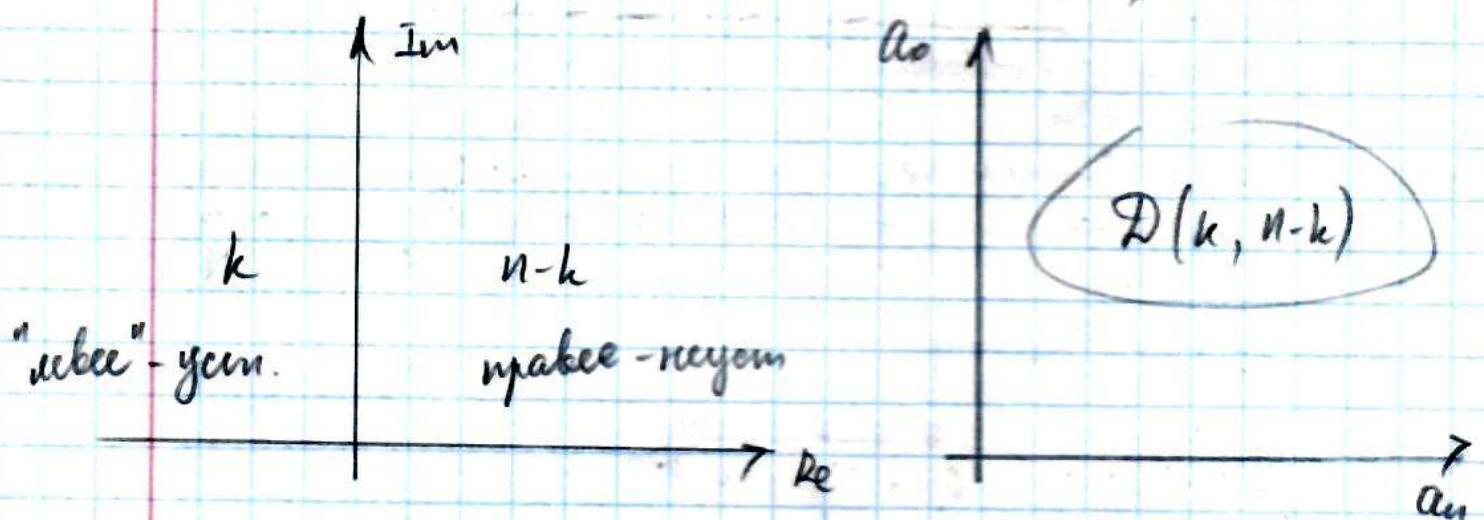
устойчивость зависит от коэф. существующим методом определения устойчивости

по этим коэф. Такой метод называется метод Д-разбиения.

Идея Д-разбиения заключается в том, чтобы учитывать друг-друга коэффициенты и посмотреть как меняются корни характеристического уравнения

$$A(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

$a_n, a_0$  - ЧАУ зависит от коэф. реальных сис.



Пример 1.

$$A(s) = a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

полином 4 степени, 4 корня, следующие возможные области:

$D(0,4)$ ;  $D(1,3)$ ;  $D(2,2)$ ;  $D(3,1)$ ;  $D(4,0)$   
 ↑    ↑    ←    ←    ←  
 один корень левый    все корни правые

только 1 деловой области, все корни левые

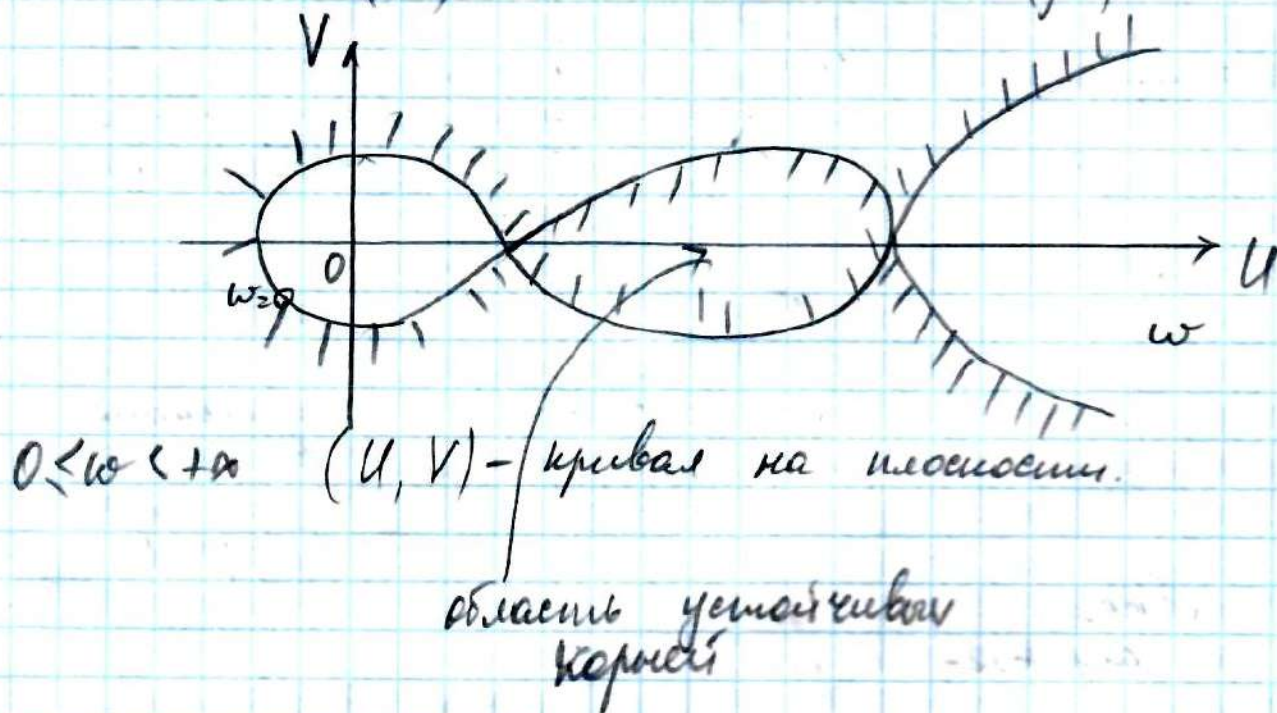
Пример 2.

$$A(s) = T_2 T_1^2 s^3 + T_2 T_3 s^2 + T_1 (k+1)s + k = 0$$

$T_2$  - значимый параметр, необходимо построить границу областей устойчивости методом Д-разложения по данному параметру.

$$T_2 [T_1^2 s^3 + T_3 s^2] + T_1 (k+1)s + k = T_2 Q(s) + N(s) = 0$$

$$T_2(s) = -\frac{N(s)}{Q(s)} \xrightarrow{s=j\omega} T_2(j\omega) = -\frac{N(j\omega)}{Q(j\omega)} = U(\omega) + jV(\omega)$$



Пример 3.

$$W(s) = \frac{s+2}{s^3 + Ts^2 + s + 1}$$

$$A(s) = s^3 + Ts^2 + s + 1 = 0 ; T(s) = -\frac{s^3 + s + 1}{s^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T(j\omega) = \frac{(j\omega)^3 + j\omega + 1}{(j\omega)^2} = \frac{-j\omega^3 + j\omega + 1}{-\omega^2} =$$

$$= \frac{-j\omega^3}{-\omega^2} + \frac{j\omega}{-\omega^2} + \frac{1}{-\omega^2} = j\omega - j\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega^2} =$$

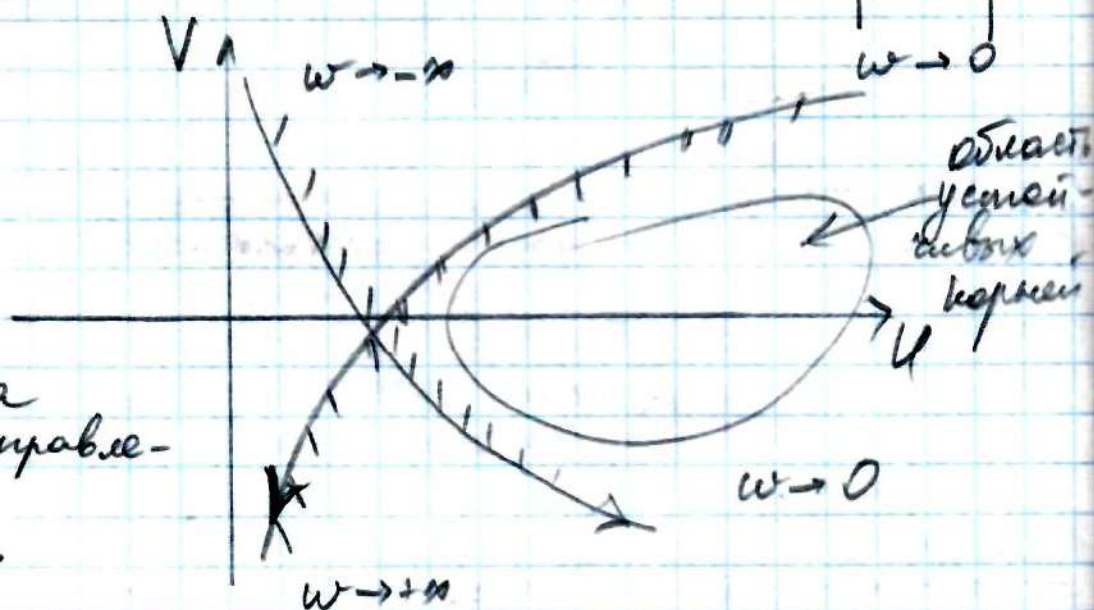
$$= -\frac{1}{\omega^2} + j\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right) = -\frac{1}{\omega^2} + j\left(\frac{\omega^2 - 1}{\omega}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\omega^2} - j\left(\frac{1 - \omega^2}{\omega}\right)$$

$$U = -\frac{1}{\omega^2}$$

$$V = -\frac{1 - \omega^2}{\omega}$$

| $\omega$ | 0        | 0.5 | 1 | 2    | $\sqrt{2}$ | 0.82 | $\infty$ |
|----------|----------|-----|---|------|------------|------|----------|
| U        | $\infty$ | 4   | 1 | 0.25 | 0.5        | 1.5  | 0        |
| V        | $\infty$ | 1.5 | 0 | -1.5 | -0.7       | -0.4 | -1       |



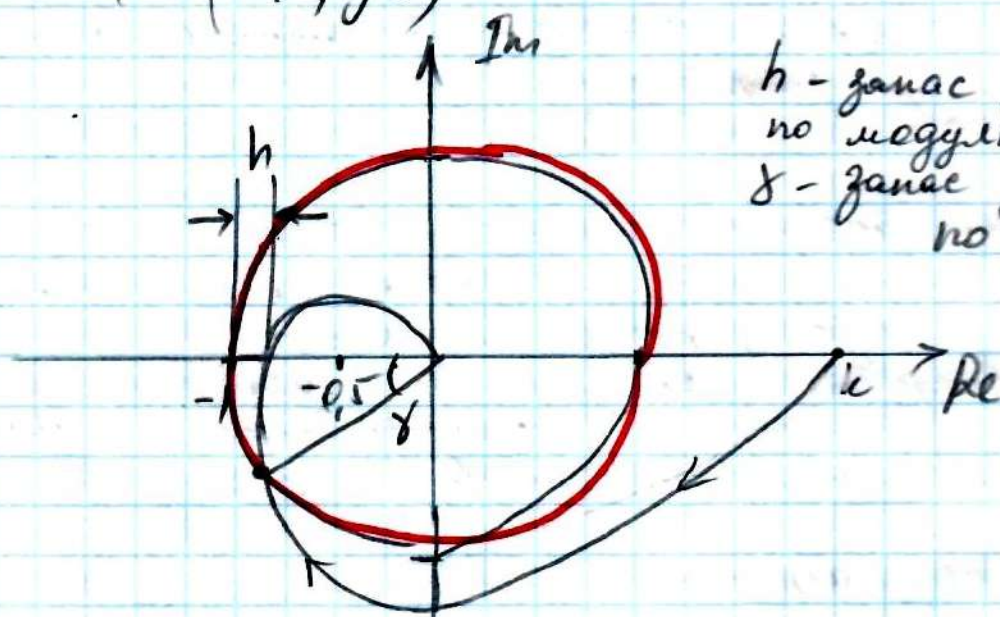
критерия  
слева от направле-  
ния роста  
частоты.

Область с  
внутренней  
критериями  
устойчивости  
область.

## Запас устойчивости

С течением времени св-ва САУ могут изменяться, поэтому чтобы изменения не вызвали неустойчивой работы системы, необходимо иметь запас устойчивости.

Запасы устойчивости по частоте могут быть созданы на основе критерия Найквиста. Здесь модуль и фаза оценивают расстояние от критической точки  $(-1; j0)$



$h$  - запас устойчивости по модулю  
 $\delta$  - запас устойчивости по фазе.

## Лемма 13

Время показатели качества регулирования определяются из переходных хар-к

1. Ошибка регулирования  $\Delta(t)$

$$\Delta(t) = z(t) - y(t) \quad \Delta_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta(t) = \Delta(\infty)$$

ошибка регулирования со временем превращается в статическую ошибку.

2. Время регулирования - интервал времени, когда между переходной характеристикой и стабилизированным значением от начала процесса меньше статической ошибки

$$|h(t) - h(\infty)| \leq \Delta_0 \quad \Delta_0 = 0,05 h(\infty)$$

3. Время достижения первого максимума: время от начала процесса до максимального значения переходной характеристики. Определяется для колебательных процессов.  $(T_m)$

4. Время достижения установившегося состояния  $(T_n)$ : время от начала процесса, когда переходная характеристика впервые выходит на установившееся значение. Определяется для колебательных процессов.

5. Перерегулирование  $\sigma$

$$\sigma = \frac{h_{\max} - h(\infty)}{h(\infty)} \cdot 100\% = \frac{A_1}{h(\infty)} \cdot 100\%$$

не больше 10-30%

6. Степень затухания  $\psi$

$$\psi = \frac{A_1 - A_3}{A_1} = 1 - \frac{A_3}{A_1}$$

незатухающий:  $\psi = 0 \Rightarrow A_1 = A_3$

aperiodический:  $\psi = 1, \Rightarrow A_3 = 0$

устойчивый:  $0 < \gamma \leq 1$

7. Количество полуколебаний определяет количество колебательного процесса

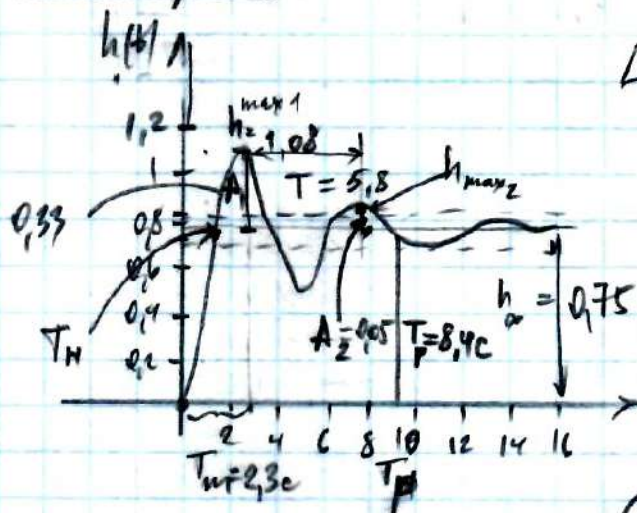
8. Собственный период  $T$  интервал времени между двумя максимумами

9. Собственная частота:  $\omega = \frac{2\pi}{T}$

10. Логарифмический декремент затухания определяет скорость затухания колебательного процесса

$$d = \ln \frac{h_{\max 1}}{h_{\max 2}}$$

Пример 1.



$$\Delta_0 = h_0 \cdot 0.05 = 0.0375$$

Установившиеся значение  $h(\infty) = 0.75$

Амплитуда разл.  $\Delta H = 0.05 \cdot h(\infty) = 0.0375$

Время разл.  $T_p = 8.4$

Время достижения первого макс  $T_m = 2.3$  с

Время достижения уст. соот  $T_n = 0.7$

Перерегул.  $\sigma = \frac{A_1}{h(\infty)} \cdot 100\% = \frac{0.33}{0.75} \cdot 100 = 44\%$

Степень затухания:  $\gamma = \frac{A_1 - A_2}{A_2} \cdot 100 = \frac{0.33 - 0.05}{0.33} \cdot 100 = 84\%$

Количество полуколебаний: 3

Собственный период и частота:  $T = 5.8$  с,  $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{5.8} = 1.08$  с<sup>-1</sup>

Логарифмический декремент затухания:

$$d = \ln \frac{h_{\max 1}}{h_{\max 2}} = \ln \frac{1.08}{0.8} = 0.3$$

лекция 14

Косвенные показатели качества

показатели САУ

Корневые показ. качества САУ

Частотные показ. кач. САУ

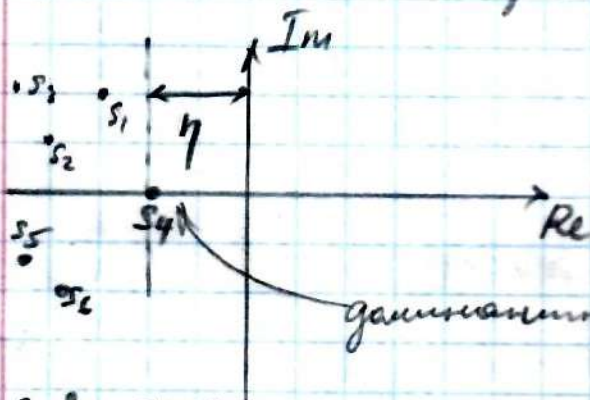
Интегральные показ. кач. САУ

Корневые показ.

1. Степень устойчивости  $\eta$

$$\eta = \min |Re s_i|, \quad s_i = \text{корни}$$

определяется модулем действ. ч-ти близке к мнимой оси корня.



$$s_1 = -\alpha_1 + j\beta_1$$

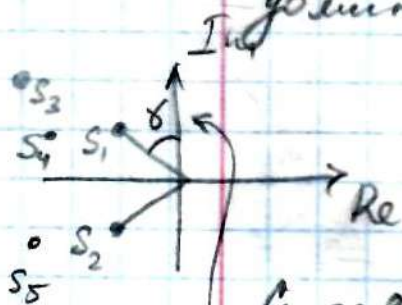
$$s_2 = -\alpha_2 + j\beta_2$$

$$s_3 = -\alpha_3 + j\beta_3$$

Время регул:  $3 \div 4 \left( \frac{1}{\eta} \right)$

для апериод

2. Степень колебательности — характеризует быстроту действия по отношению к мнимой оси действ. ч-ти к мнимой части гашающих корней



$$m = \min \left| \frac{Re s_i}{Im s_i} \right|$$

определяет скорость затухания

Степень затухания:  $\psi = 1 - \rho \sin$

$$\delta = \arctg \frac{Re(s)}{Im(s)} = \arctg m$$

## Математические показ

1. Показатель  $M$  - определяется как отношение  $A_{\max}$

$$M = \max_{\omega} \frac{A_T(\omega)}{A_T(0)} = \max \left| \frac{W_0(j\omega)}{1 + W_0(j\omega)} \right|$$

сверхрезуонансного  
состояния системы

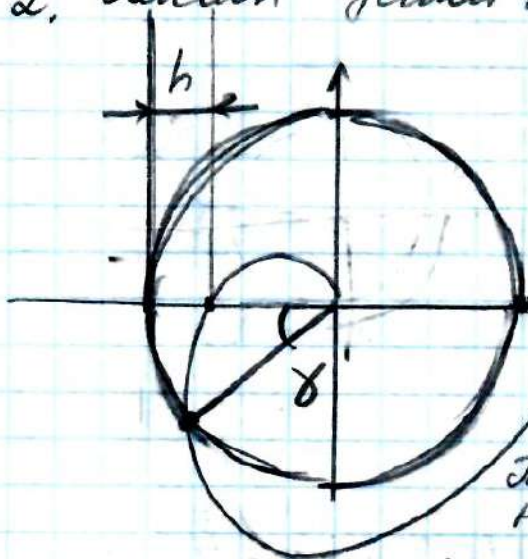
$$m = M - \sqrt{M^2 - 1}$$

степень колебательности

$$M = \frac{m^2 + 1}{2m}$$

$$1,15M \leq 2$$

2. Запас устойчивости



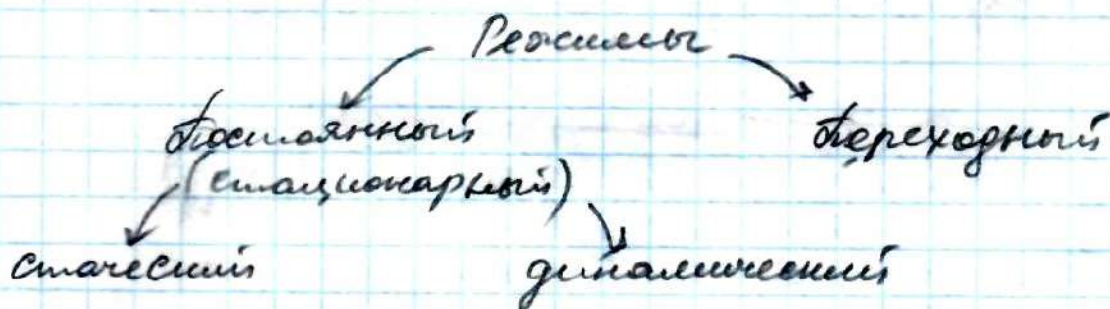
$h$  - запас устойчивости по модулю

$\delta$  - запас устойчивости по фазе

Интегральный показатель —  
мера между кривой переходного процесса и линией установившегося режима.

лекция 15

## Качество стеченных процессов



Входные и выходные сигналы статического установившегося процесса не изменяются, поэтому его качество характеризуется только точностью регулирования

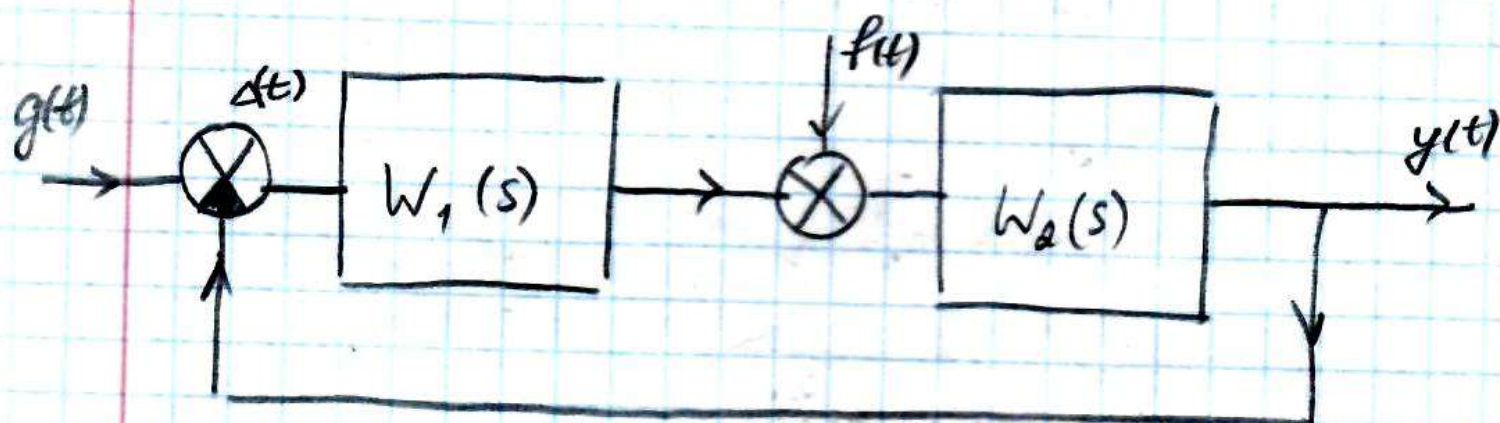
Показатель статического процесса — статическая ошибка

системы

статическое (есть ошибка)

астатическое (нет ошибки)

Статическое  $\rightarrow \Delta_0 \neq 0$



$$\Delta = g - y$$

$$\Delta = g - y = g - (f W_2(s) + \Delta W_1(s) W_2(s)) = g - f W_2(s) - \Delta W_1(s) W_2(s)$$

$$- \Delta W_1(s) W_2(s) = g - W_2(s) (f + \Delta W_1(s))$$

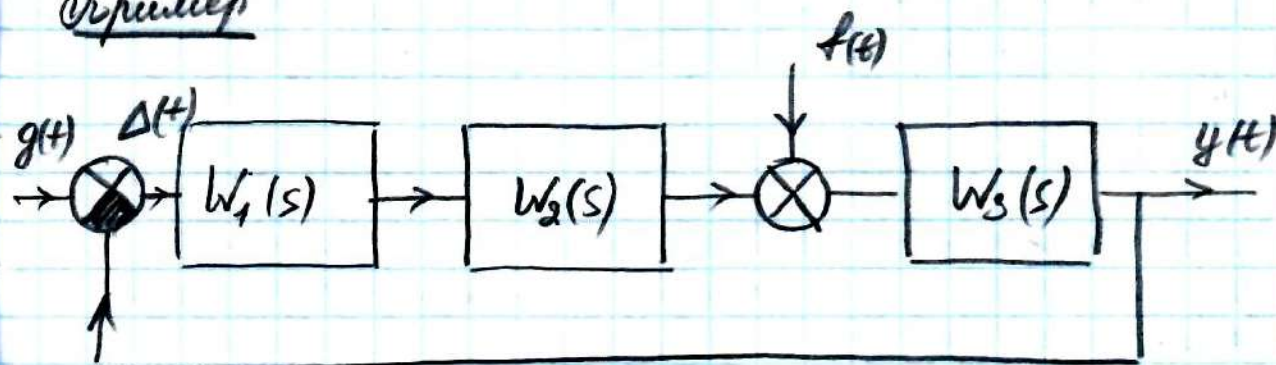
$$\Delta = \frac{g}{1 + W_1(s) W_2(s)} - \frac{f}{1 + W_1(s) W_2(s)} W_2(s)$$

$s = 0$ , должна быть равна нулю  
Т.к. процесс не динамический.

$$W_1(0) = k_1; \quad W_2(0) = k_2$$

$$\Delta_0 = \frac{g}{1+k_1 k_2} - \frac{f}{1+k_1 k_2} k_2$$

пример



$$W_1(s) = \frac{2}{s+1}; \quad W_2(s) = \frac{4}{s+3}; \quad W_3(s) = \frac{5}{s+2}$$

$$g(t) = f(t) = 1; \quad f(t) = f = g = \text{const}$$

$$W_{12}(s) = W_1(s) \cdot W_2(s) = \frac{2}{s+1} \cdot \frac{4}{s+3} = \frac{8}{(s+1)(s+3)} \quad W_{12}(0) = \frac{8}{3}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= g - y = g - (f W_3(s) + \Delta W_{12}(s) W_3(s)) = \\ &= g - W_3(s) (f + \Delta W_{12}(s)) \end{aligned}$$

$$\Delta = g - W_3(s) f - \Delta W_3(s) W_{12}(s)$$

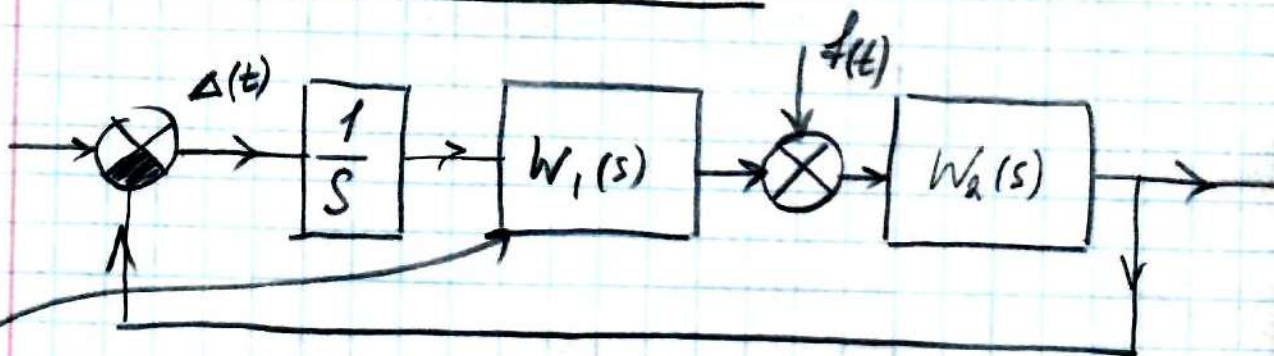
$$\Delta (1 + W_3(s) W_{12}(s)) = g - W_3(s) f$$

$$\Delta = \frac{g}{1 + W_{12}(s) W_3(s)} - \frac{f}{1 + W_{12}(s) W_3(s)} \cdot W_3(s)$$

$$s=0; \quad W_1(0) = 2; \quad W_2(0) = \frac{4}{3}; \quad W_3(0) = \frac{5}{2}$$

$$\Delta = \frac{1}{1 + \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{2}} - \frac{2}{1 + \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{2}} \cdot \frac{5}{2} = 0,13 - 0,26 \cdot \frac{5}{2} = -0,52$$

## Астатические системы



Для достижения астатичности системы в её состав включаются интегрирующие звенья (интеграторы)

$$\Delta = g - y = g - (f W_2(s) + \Delta W_1(s) W_2(s)) = g - W_2(s) (f + \Delta W_1(s) \frac{1}{s})$$

$$\Delta = \frac{g \cdot s}{s + W_1(s) W_2(s)} - \frac{f \cdot s}{s + W_1(s) W_2(s)} W_2(s) \quad s=0. \quad \Delta=0$$

лениция 16

Критерий Рауса (1875)

Эдвард Росс Раус

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} \dots b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} \dots a_1 s + a_0}$$

Для характеристического полинома:

Критерий Рауса: для асимптотической устойчивости линейной СДУ, необходимо и достаточно, чтобы все элементы первого столбца таблицы Рауса были положительными.

Таблица Рунга:

|           |           |                 |
|-----------|-----------|-----------------|
| $a_n$     | $a_{n-2}$ | $a_{n-4} \dots$ |
| $a_{n-1}$ | $a_{n-3}$ | $a_{n-5} \dots$ |
| $b_1$     | $b_2$     | $b_3 \dots$     |
| $c_1$     | $c_2$     | $c_3 \dots$     |

$$b_1 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

то же самое для элементов  $b_2, b_3$

$$b_2 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}; \quad b_3 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}$$

$$c_1 = -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}; \quad c_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-4} \\ b_1 & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$c_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-6} \\ b_1 & b_{i-1} \end{vmatrix}$$

Число строк равно  $n+1$ , столбцов  $n-1$

Пример 1

$$W(s) = \frac{5s+4}{2s^4+5s^3+4s^2+2s+1}$$

$$\begin{matrix} 2s^4 & +5s^3 & +4s^2 & +2s & +1 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{matrix};$$

Таблица Рунга

|       |       |       |
|-------|-------|-------|
| $a$   | 4     | 1     |
| 5     | 2     | 0     |
| $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ |
| $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ |
| $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ |

Диффузия - попер. связь  
н/з некоторых

Теория автоматического управления  
мех. и элект. сист. и след. сист.  
бесконечно малой продолж. времени.

$$\dot{y}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}$$

Простейшее:

$$\dot{y}(t) = y(t)$$

общее решение:

$$y(t) = ce^t$$

Первого порядка: ур-ние вида

$$\dot{y}(t) + ay(t) = 0$$

Характеристическое ур-ние:

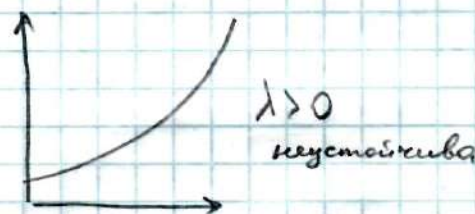
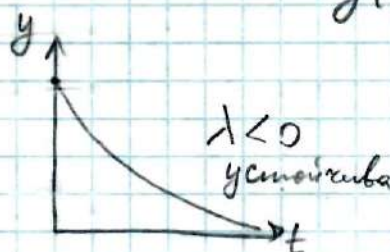
$$\lambda + a = 0$$

Корень:

$$\lambda = -a$$

Общее решение:

$$y(t) = ce^{\lambda t} = ce^{-at}$$



Второго порядка: уравнение вида:

$$a\ddot{y}(t) + b\dot{y}(t) + cy(t) = 0$$

Характеристическое ур-ние

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

Корни ур-ния:

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D > 0$$

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$D = 0$$

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t}$$

$$D < 0$$

$$\lambda = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$$

$$y(t) = c_1 e^{\alpha t} \sin \beta t + c_2 e^{\alpha t} \cos \beta t$$

колебательная

"

Общее решение: ур-ние вида:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$$

Характеристическое ур-ние:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Корни:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

Могут (составные части решения)

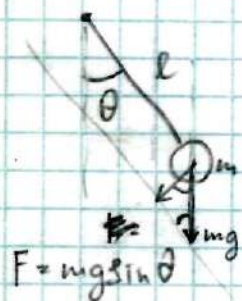
$e^{\alpha t}, \sin(\beta t), \cos(\beta t), 1, t, t^2, te^{\alpha t}, t^2e^{\alpha t} \sin(\beta t) \dots$

Общее решение:

$$y(t) = C_1(\text{первая мода}) + C_2(\text{вторая мода}) + \dots + C_n(\text{n-ая мода})$$

| корни                                              | мода                                                   | мода при кратных корнях                                                    |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| $\lambda = \alpha$<br>(кратный)                    | $e^{\alpha t}$                                         | $te^{\alpha t}, t^2e^{\alpha t}, t^3e^{\alpha t} \dots$                    |
| $\lambda = \pm \beta i$<br>пара<br>мнимых<br>чисел | $\sin \beta t, \cos \beta t$                           | $t \sin \beta t, t \cos \beta t, t^2 \sin \beta t, t^2 \cos \beta t \dots$ |
| $\lambda = \alpha \pm \beta i$                     | $e^{\alpha t} \sin \beta t, e^{\alpha t} \cos \beta t$ | $te^{\alpha t} \sin \beta t, te^{\alpha t} \cos \beta t$                   |
| $\lambda = 0$                                      | 1                                                      | $t, t^2, t^3 \dots$                                                        |

Математическое маятник:



$$I = ml^2$$

$$F = mg \sin \theta$$

$$M = Fl = mg \sin \theta \cdot l$$

Второй закон Ньютона:

$$M = I\ddot{\theta}$$

$$-mg \sin \theta \cdot l = ml^2 \ddot{\theta}$$

$$-mg \sin \theta = \mu l \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

нелинейное уравнение

При малых углах  $\sin \theta \approx \theta$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0$$

уточнее уравнение  $\ddot{\theta} = \ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{l} \theta(t) = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{g}{l} = 0$$

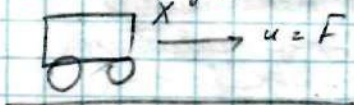
$$\lambda^2 = -\frac{g}{l}$$

$$\lambda = \pm \sqrt{-\frac{g}{l}}$$

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{g}{l}} i$$

$$\theta(t) = C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right)$$

Тело движущееся под действием силы:



$$m \ddot{x} = u$$

если  $u = 0$

$$\ddot{x} = 0$$

$$\lambda^2 = 0$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , корни 1, t

$$x = C_1 + C_2 t$$

П-пропорциональный  
Д-дифференциальный  
регулятор

Анализ регуляторов

П-регулятор

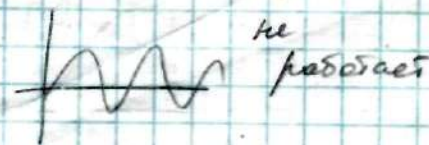
$$u = -kx$$

$$\ddot{x} = -kx$$

$$\lambda^2 + k = 0$$

$\lambda = \pm \sqrt{k} i$ , корни  $\sin(\sqrt{k} t)$ ,  $\cos(\sqrt{k} t)$

$$x(t) = C_1 \sin(\sqrt{k} t) + C_2 \cos(\sqrt{k} t)$$



ПД-регулятор

$$u = -5x - 4\dot{x}$$

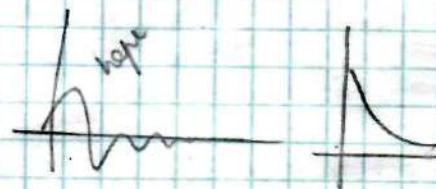
$$\ddot{x} = -5x - 4\dot{x}$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda = -2 \pm i$$

$$e^{-2t} \sin t, e^{-2t} \cos t$$

$$x(t) = C_1 e^{-2t} \sin t + C_2 e^{-2t} \cos t$$



Поворот на  $180^\circ$

$$\ddot{\omega} + \frac{k_m k_e}{J R} \omega = \frac{k_m}{J R} U$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k_m k_e}{J R} \dot{\theta} = \frac{k_m}{J R} U$$

П-регулятор  $U = k(180^\circ - \theta)$

$$\ddot{\theta} + \frac{k_m k_e}{J R} \dot{\theta} = \frac{k_m}{J R} k(180^\circ - \theta)$$

ошибка регулирования  $e = (180^\circ - \theta)$

$e = -\theta$ ,  $\dot{e} = -\dot{\theta}$ ,  $\ddot{e} = \ddot{\theta}$  тогда перепишем все через ошибку регулирования

$$\ddot{e} + \frac{k_m k_e}{J R} \dot{e} + \frac{k_m k_p}{J R} e = 0$$

$$\lambda^2 + \frac{k_m k_e}{J R} \lambda + \frac{k_m k_p}{J R} = 0$$

$$\left(\frac{k_m k_e}{J R}\right)^2 - 4 \frac{k_m k_p}{J R} > 0$$

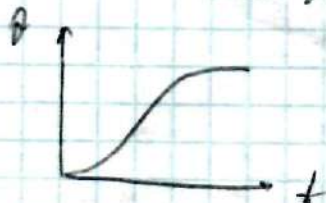
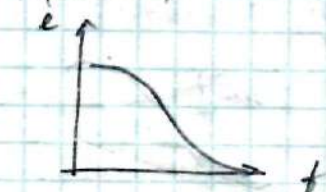
$$\left(\frac{k_m k_e}{J R}\right)^2 - 4 \frac{k_m k_p}{J R} < 0$$

без

$$k_p < \frac{k_m k_e^2}{4 J R}$$

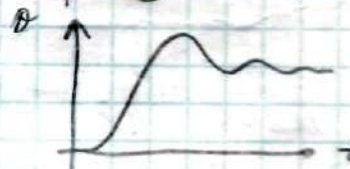
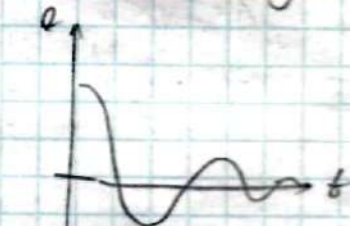
$$k_p > \frac{k_m k_e^2}{4 J R} \text{ колеблется.}$$

$$e(t) = C_1 e^{-\alpha_1 t} + C_2 e^{-\alpha_2 t}$$



без перерегулирования

$$e(t) = C_1 e^{-\alpha t} \sin \beta t + C_2 e^{-\alpha t} \cos \beta t$$



перерегулирование

Две взаимосвязанные координаты точки

$$M(t) = C_M \varphi \cdot I(t)$$

$$u(t) = e(t) + Ri(t)$$

$$e(t) = C_w \varphi \omega(t)$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = M(t) - M_H(t)$$

$$k_1 = C_M; \quad k_2 = C_w$$

$$\begin{cases} J \frac{d\omega(t)}{dt} = k_1 i(t) - M_H(t) \\ e(t) = k_2 \omega \\ \omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \\ u(t) = e(t) + Ri(t) \end{cases} \quad \text{назад ток}$$

Переходим к переменной  $\theta(t)$

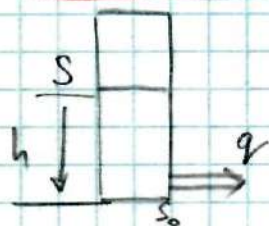
$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{k_1}{R} \left[ u(t) - k_2 \frac{d\theta(t)}{dt} \right] - M_H(t)$$

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{k_1 k_2}{R} \frac{d\theta(t)}{dt} = k_2 u(t) - M_H(t)$$

## Линеаризация уравнения

- $U(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot U[x]$
- $U[x_1 + x_2] = U[x_1] + U[x_2]$

### 1. Алгебраич. ур-ние



$$\rho g h = \frac{\rho v^2}{2}$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$q = S v = S_0 \sqrt{2gh}$$

$$q = \alpha \sqrt{h} \quad ; \quad \alpha = S_0 \sqrt{2g}$$

$\Downarrow$  линеаризовать

$$q = kh$$

$$k = \left. \frac{dq}{dh} \right|_{h=0.5} = \left. \frac{1}{2\sqrt{h}} \right|_{h=0.5} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} kh + b = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0.5 + b \quad ; \quad b = \frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0.354$$

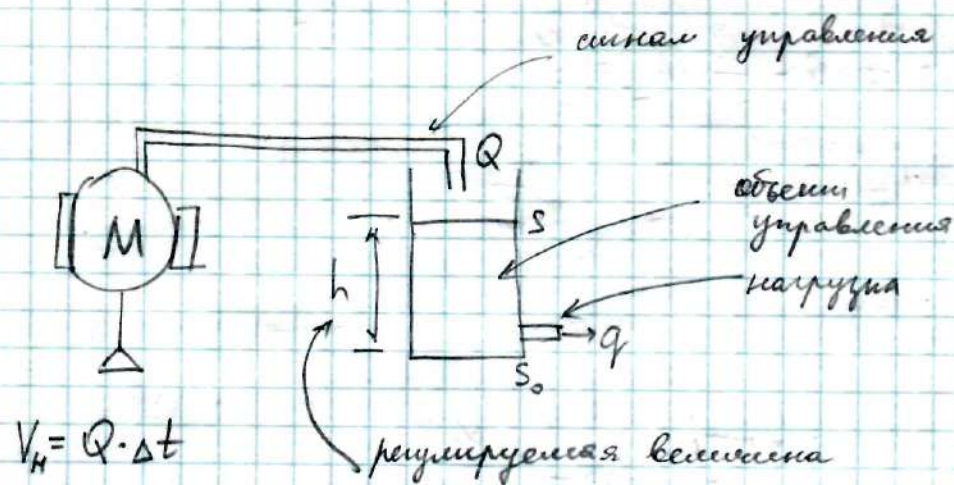
$$q = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot h + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$q_0 + \Delta q = \frac{\sqrt{2}}{2} (h_0 + \Delta h) + \frac{\sqrt{2}}{4} \quad ; \quad \frac{\sqrt{2}}{2} h_0 + \frac{\sqrt{2}}{4} + \Delta q = \frac{\sqrt{2}}{2} h_0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta h + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$q_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} h_0 + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Delta q = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \Delta h$$

## 2. Линеаризация дифференциального уравнения



$$V_H = Q \cdot \Delta t$$

$$V_C = q \cdot \Delta t$$

$$\Delta h = \frac{Q - q}{S} \cdot \Delta t$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{S} [Q - q]$$

в установившемся, статическом режиме все производные равны 0

$$0 = \frac{1}{S} Q(t) - \frac{\alpha}{S} \sqrt{h(t)}$$

$$h = \frac{Q^2}{\alpha^2}$$

статическая характеристика — зависимость между установившимся значением входа  $Q$  и выхода  $h$

$$Q = Q_0$$

вход

$$h = h_0$$

выход

$$h = \frac{Q^2}{\alpha^2}$$

удовлетворяет уравнению

$$Q = Q_0 + \Delta Q$$

Регулирующее воздействие

↑

рег

Трансформатор

$$h = h_0 + \Delta h$$

↑

малые отклонения от рабочей точки

$$f(x, y) = f(x_0; y_0) + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y + F(x, y)$$

зависит от внешних параметров в той же точке, При малых  $\Delta x$  и  $\Delta y$   $F(x, y) \approx 0$

$$f(x, y) \approx f(x_0; y_0) + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} \cdot \Delta y$$

из уравнения

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{S} \cdot Q(t) - \frac{\alpha}{S} \sqrt{h(t)}$$

расматривая  
преобразование

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial Q} \left[ \frac{1}{S} \cdot Q - \frac{\alpha}{S} \sqrt{h} \right] = \left( \frac{1}{S} \right) \\ \frac{\partial}{\partial h} \left[ \frac{1}{S} \cdot Q - \frac{\alpha}{S} \sqrt{h} \right] = -\frac{\alpha}{2S\sqrt{h}} \end{cases}$$

переходим к формуле Тейлора

$$\frac{1}{S} Q - \frac{\alpha}{S} \sqrt{h} \approx \left[ \frac{1}{S} Q_0 - \frac{\alpha}{S} \sqrt{h_0} \right] + \frac{1}{S} \Delta Q - \frac{\alpha}{2S\sqrt{h_0}} \Delta h$$

$f(x_0, y_0)$

$$\begin{cases} Q = Q_0 + \Delta Q \\ h = h_0 + \Delta h \end{cases}$$

$$\frac{d(h_0 + \Delta h)}{dt} = \frac{d\Delta h}{dt}$$

если  $Q_0$  и  $h_0$  соответствуют установившемуся режиму, то

$$\text{если } \left[ \frac{1}{S} Q_0 - \frac{\alpha}{S} \sqrt{h_0} \right] = 0 \Rightarrow \frac{d\Delta h}{dt} + k_h \cdot \Delta h \approx k_Q \cdot \Delta Q, \text{ где}$$

$$k_h = \frac{\alpha}{2S\sqrt{h_0}}$$

$$k_Q = \frac{1}{S}$$

и уравнению

$$\frac{1}{S} Q - \frac{\alpha}{S} \sqrt{h} \approx \underbrace{\left[ \frac{1}{S} Q_0 - \frac{\alpha}{S} \sqrt{h_0} \right]}_0 + \frac{1}{S} \Delta Q - \frac{\alpha}{2S\sqrt{h_0}} \Delta h$$

$$\frac{d\Delta h}{dt} = \underbrace{\frac{1}{S} \Delta Q}_{k_Q} - \underbrace{\frac{\alpha}{2S\sqrt{h_0}} \Delta h}_{k_h}$$

Тогда уравнение окончательно примет вид

$$\frac{dh(t)}{dt} + k_h \cdot h(t) \approx k_Q \cdot Q(t)$$

считаем, что малые отклонения  $\Delta h$  и  $\Delta Q$

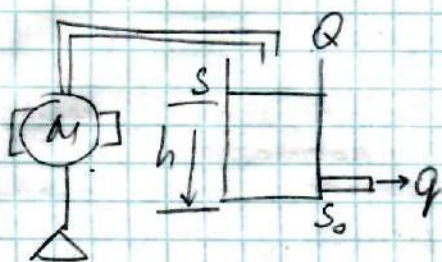
$$\dot{h} + k_h h = k_Q Q$$

$$(S + k_h) \Delta H = k_Q \Delta Q$$

$$\Delta H = \frac{k_Q \Delta Q}{S + k_h} = \frac{k_Q}{S + k_h} \Delta Q$$

передаточная функция

# Рассмотрим управление объектом



$q$  - изменяется независимо,  
создаем независимую нагрузку на  
объект.  
Объект - водонапорная башня  
Башня автоматически поддерживает  
уровень воды в емкости.

Если  $Q - q$  постоянна в течение интервала  $\Delta t$ , то

$$\Delta h(t) = \frac{Q(t) - q(t)}{S} \Delta t$$

$$\Delta h(t) = \frac{1}{S} \int_0^t (Q(\tau) - q(\tau)) d\tau$$

Пусть в начальный момент времени  $t=0$ ,  $h=h_0$ ;  $Q(0)=q(0)=q$

$$Q(t) = Q_0 + \Delta Q(t); \quad q(t) = q_0 + \Delta q(t)$$

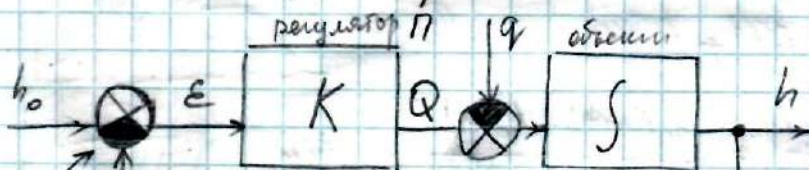
где  $\Delta Q(t)$  и  $\Delta q(t)$  -  
малые отклонения  
потоков от nomi-  
нального режима

$$h(t) = \frac{1}{S} \int_0^t (Q(\tau) - q(\tau)) d\tau$$

выделим  
производную

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{S} [Q(t) - q(t)]$$

Пусть  $S = 1 \text{ м}^2$



$$Q(t) = -k E(t) = -k \cdot [h_0(t) + h(t)]$$

$$E(t) = h_0(t) - h(t)$$

$$\dot{E}(t) = \frac{dh_0(t)}{dt} - \frac{dh(t)}{dt}$$

$$h(t) = -\dot{E}(t)$$

$$-\dot{E} = \frac{1}{S} [Q(t) - k E(t)]$$

$$-\dot{E} = \frac{1}{S} Q - \frac{k}{S} E(t)$$

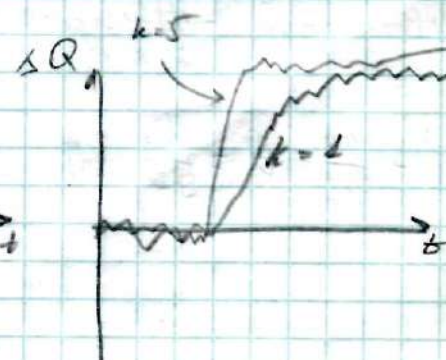
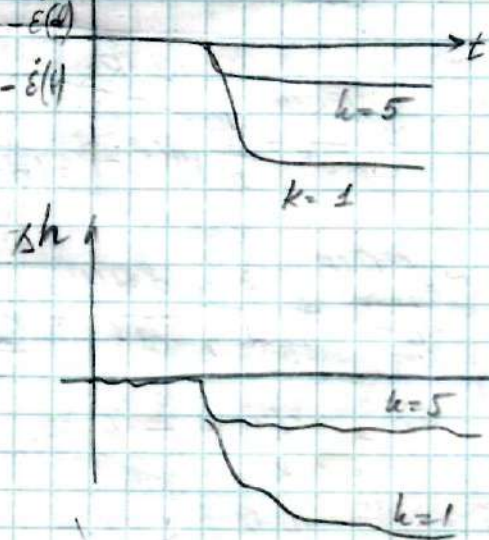
$$\dot{E} = \frac{k}{S} E(t) - \frac{1}{S} Q$$

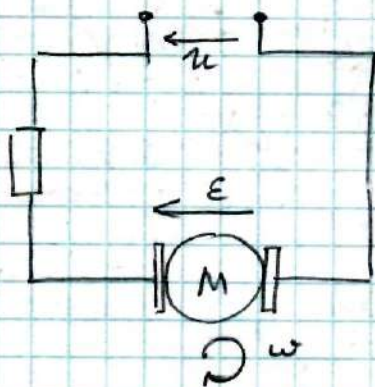
$$\dot{E} - \frac{k}{S} E(t) + \frac{1}{S} Q = 0$$

сигнал  
загрязнения  
вычитание

$m$  - сигнал измерения

тогда сигнал  $m$



двигательгидравлическийпостоянного тока $u$  - вход $\theta$  - выход

Если напряжение не меняется, угловая скорость стабилизируется постоянной, тем больше напряжение, тем больше  $\omega$

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = M(t) - M_H(t)$$

напряжение

гидравлический момент

$$M(t) = C_M \varphi \cdot i(t)$$

электрический момент

$$u(t) = e(t) + R \cdot i(t)$$

$$e(t) = C_E \varphi \cdot \omega(t)$$

коэф.

$$k_1 = C_M \varphi$$

$$k_2 = C_E \varphi$$

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = k_1 i(t) - M_H(t)$$

$$e(t) = k_2 \omega$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$u(t) = e(t) + R i(t)$$

(1)

(2)

(3)

(4)

$$u(t) = k_2 \omega + R i(t)$$

$$i = \frac{u(t) - k_2 \omega}{R}$$

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{k_1 (u(t) - k_2 \omega)}{R} - M_H$$

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{k_1 u(t) - k_1 k_2 \omega}{R} - M_H$$

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{k_1 u(t) - k_1 k_2 \frac{d\theta(t)}{dt}}{R} - M_H$$

$$u(t) = -Z \theta - \Pi \text{ регулятор}$$

$$u(t) = -Z \theta - Z \dot{\theta} - \Pi \text{ регулятор}$$

$$u(t) = -Z \dot{\theta} - \Pi \text{ регулятор}$$

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = \frac{k_1}{R} \left[ u(t) - k_2 \frac{d\theta(t)}{dt} \right] - M_H$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k_1 k_2}{JR} \dot{\theta} = \frac{k_1}{JR} u(t)$$

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + \frac{k_1 k_2}{R} \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{k_1}{R} u(t) - M_H \quad / : J$$

$$J \ddot{\theta} + \frac{k_1 k_2}{R} \dot{\theta} = k_2 u(t)$$

$$J \ddot{\theta} + \frac{k_1 k_2}{R} \dot{\theta} = k_2 Z \theta$$

$$J \lambda^2 + \frac{k_1 k_2}{R} \lambda + k_2 Z = 0$$

# Модель линейных объектов в пространстве состояний

Показан в нормальной форме Коши:

$$\begin{cases} \dot{y} = x(t) \\ \dot{x}(t) = a x(t) + b u(t) \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u(t)$$

Для функции постоянного тока

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{\omega}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_1 k_2}{J R} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_1}{J R} \end{bmatrix} \cdot u(t)$$

вектор состояния

матрица состояния

матрица управления

$$\boxed{\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t)}, \text{ где } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_1 k_2}{J R} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_1}{J R} \end{bmatrix}$$

$x = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix}$  модель "вход-состояние"

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases} \quad \leftarrow \text{модель "вход-состояние-выход"}$$

$$y(t) = \theta(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

т.к.  $A, B, C$  и  $D$  не зависят от времени,  $D=0 \Rightarrow$  стационар.

$x(0)$  при  $t=0$ ,  $u(t)$  при всех  $t > 0$ ,  $0 < t \leq \Delta t$

$$\begin{cases} x(\Delta t) \approx x(0) + \dot{x}(0) \Delta t = x(0) + [A \cdot x(0) + B \cdot u(0)] \cdot \Delta t \\ y(\Delta t) \approx C \cdot x(\Delta t) + D \cdot u(\Delta t) \end{cases}$$

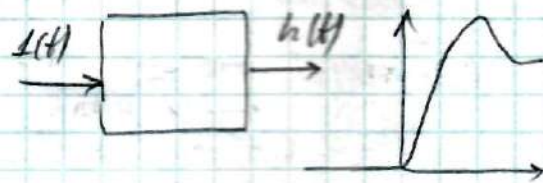
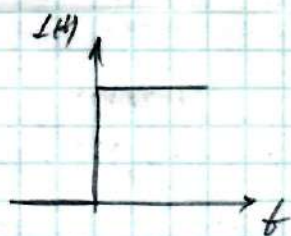
$$\begin{cases} x(2\Delta t) \approx x(\Delta t) + \dot{x}(\Delta t) \cdot \Delta t = x(\Delta t) + [A \cdot x(\Delta t) + B \cdot u(\Delta t)] \cdot \Delta t \\ y(2\Delta t) \approx C \cdot x(2\Delta t) + D \cdot u(2\Delta t) \end{cases}$$

Метод Эйлера - можно использовать для любых уравнений "вход-состояние-выход"

## Переходная функция

### 1. Единичный сигнал

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$



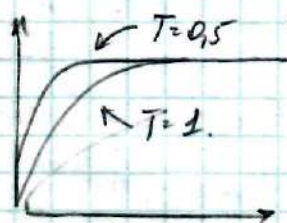
$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \cdot x(t) \quad T = \text{const}, \quad k = \text{const}$$

Если  $x(t) = 1$  при  $t > 0$ , найдем решение диф. урн

$$y(t) = k + C_1 \cdot \exp\left(-\frac{t}{T}\right)$$

$$y(0) = 0, \quad C_1 = -k$$

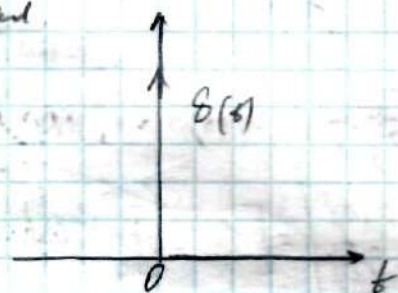
$$h(t) = y(t) = k \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{T}\right)\right) \quad \text{— переходная ф-ция}$$



### 2. Импульсный сигнал

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0 \\ 1, & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$



Пусть ширина прямоугольного сигнала равна  $\varepsilon$ , а высота  $1/\varepsilon$   
 $x(t) = \frac{1}{\varepsilon} [1(t) - 1(t-\varepsilon)]$ , где  $1(t-\varepsilon)$  — единичный сигнал, который приходит в момент  $t = \varepsilon$

$$y(t) = \frac{1}{\varepsilon} [h(t) - h(t-\varepsilon)]$$

$$w(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h(t) - h(t-\varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{dh(t)}{dt}$$

$$h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau$$

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt}$$

Если  $h(t) = y(t) = k \cdot \left(1 - \exp\left(1 - \frac{t}{T}\right)\right)$ , то

$$w(t) = \frac{d}{dt} \left[ k \left(1 - \exp\left(1 - \frac{t}{T}\right)\right) \right] = \frac{k}{T} \exp\left(\frac{t}{T}\right)$$

Срочно в форме импульсного хар-ны — снять невозможно.

## Дифференциальные уравнения

Входной сигнал можно представить как воздействие некоторого оператора на вход

$$b_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t), \text{ где } a_i (i=0,1,2,\dots) \text{ и } b_i (i=0,1,2,\dots)$$

Введем оператор дифференцирования:  $p = \frac{d}{dt}$   
Тогда запись  $p x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$  означает производная  
записанная в операторной форме:

$$\dot{y}(t) = p y(t) = \frac{dy}{dt}$$

$$\ddot{y}(t) = p^2 y(t) = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = p x(t), \text{ тогда}$$

$$b_2 p^2 y(t) + b_1 p y(t) + b_0 y(t) = a_1 p x(t) + a_0 x(t)$$

$$(b_2 p^2 + b_1 p + b_0) y(t) = (a_1 p + a_0) x(t)$$

$$y(t) = \frac{a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0} \cdot x(t) = \underline{W(p)} x(t)$$

$$W(p) = \frac{a_1 p + a_0}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}$$

Правильная - если  
степень числителя  
не больше, чем степень  
знаменателя

Собственно правильная -  
если степень числителя  
меньше, чем степень  
знаменателя

Неправильная, если  
степень знаменателя больше

## Преобразование Лапласа

$$L\{f(t)\}$$

$$f(t) \rightarrow F(s)$$

оригинал

изображение

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt, \quad s = \sigma + j\omega$$

Для функции Хевисайда

так как в пределе  $e^x$  geht

прямое  $F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{-s} \cdot e^{-st} \Big|_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{-s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s}$

обратное

$$F(s) \rightarrow f(t)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} dt$$

свойства

а) выполнение принципа суперпозиции

б)  $\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = s \cdot F(s) - f(0)$  , только для нулевых начальных условий

в) можно найти начальные и конечные значения функции оригинала при  $t=0$  и  $t \rightarrow \infty$  не возмущая оригинал

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s) ; f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

Вернемся к уравнению:

$$b_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) = a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t)$$

$$b_2 s^2 Y(s) + b_1 s Y(s) + b_0 Y(s) = a_1 s X(s) + a_0 X(s)$$

$$(b_2 s^2 + b_1 s + b_0) Y(s) = (a_1 s + a_0) X(s)$$

$$Y(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0} X(s) = W(s) X(s), \text{ где } W(s) = \frac{a_1 s + a_0}{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}$$

Пример:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k x(t)$$

$$x(t) = 1(t) ;$$

$$\mathcal{L}\left\{T \frac{dy(t)}{dt}\right\} = T s Y(s)$$

$$X(s) = \frac{1}{s} ; W(s) = \frac{k}{Ts+1}$$

$$Ts Y(s) + Y(s) = k X(s)$$

$$Y(s) (Ts+1) = k X(s)$$

$$Y(s) = \frac{k}{Ts+1} X(s)$$

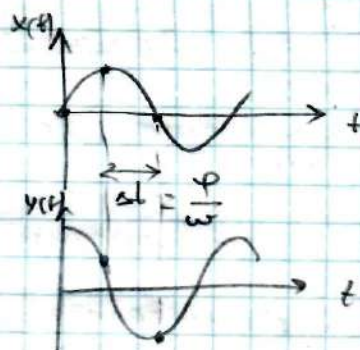
$$Y(s) = \frac{k}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s}$$

## Частотные характеристики

Подаем на вход звена еще один стандартный сигнал — гармонический сигнал

$$x(t) = \sin(\omega t)$$

$$y(t) = A(\omega) \cdot \sin(\omega t + \varphi(\omega))$$



$$A(\omega) = |W(j\omega)|$$

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arg \frac{\operatorname{Im} W(j\omega)}{\operatorname{Re} W(j\omega)}, \quad \text{то есть поворачивает вектор } S$$

$$S = j\omega, \quad \text{Для каждой частоты } \omega \quad W(j\omega) = P + jQ \quad \text{— комплексная величина}$$

$$\text{ампл. } |W(j\omega)| = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad \text{фаза } \arg W(j\omega) = \arctan \frac{Q}{P}$$

$W(j\omega)$  — частотная характеристика

$$P(\omega) = \operatorname{Re} W(j\omega); \quad Q(\omega) = \operatorname{Im} W(j\omega)$$

## Типовые звенья

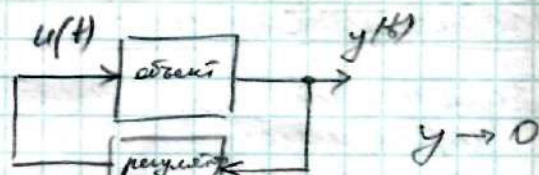
1. Усилитель
2. Интегральное звено
3. Интегральное звено
4. Дифференциальное звено
5. П.Д. — звено
6. Аperiodическое звено 2-го порядка
7. Колебательное звено
8. Консервативное звено
9. Звено чистого запаздывания
10. Реальный интегратор
11. Реальный дифференциатор

## Регуляторы с астатизмом

1. Стабилизация
2. Следение

Стабилизация

- Чем больше производных использует регулятор, тем более устойчивую систему мы можем получить



А регулятор - приблизительно:  $\ddot{y} \approx \frac{\Phi}{0,0001s+1}$   
 где  $\Phi$  равно усилителю регулятора

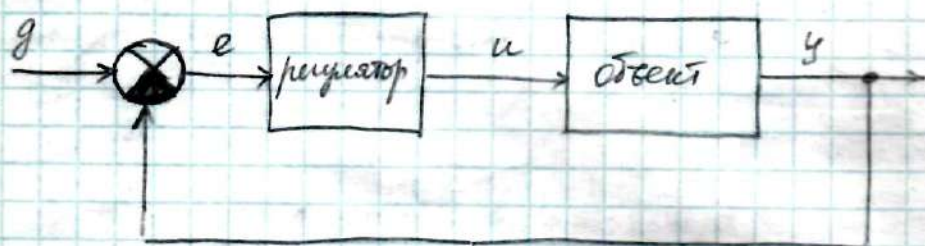
$$\ddot{y} - 2\ddot{y} + 3\ddot{y} - 4\dot{y} + 5y = u$$

регулятор  
 $u = 0$

Замкнутая система

$$\ddot{y} - 2\ddot{y} + 3\ddot{y} - 4\dot{y} + 5y = 0$$

Следение



цель:  $y \rightarrow g$  ( $e \rightarrow 0$ )

$G(s)$  - образ заданного воздействия

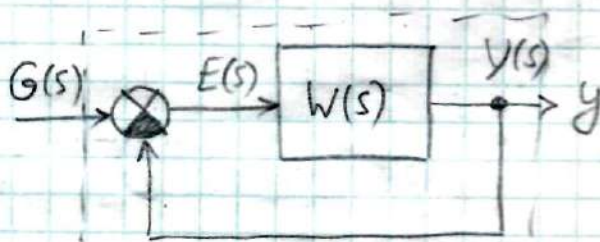
$E(s)$  - образ ошибки системы

$W(s)$  - образ регулятора

$U(s)$  - образ управления

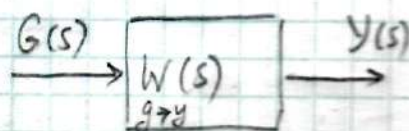
$W(s)$  - образ объекта

$Y(s)$  - образ выхода

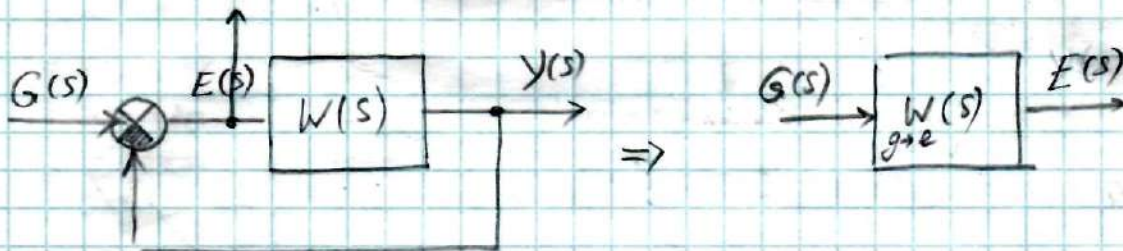


$$W(s) = W_{reg}(s) \cdot W_{obj}(s)$$

$\Downarrow$



или если важно качество регулирования



$$\left. \begin{aligned} G - Y &= E \\ E \cdot W &= Y \end{aligned} \right\}$$

$$(G - Y)W = Y$$

$$\boxed{\frac{Y}{G} = \frac{W}{1+W}}$$

или

$$\left. \begin{aligned} EW &= G - E \\ (1+W) \cdot E &= G \end{aligned} \right\}$$

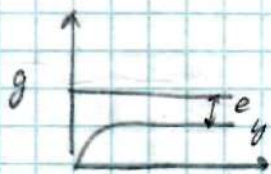
$$\boxed{\frac{E}{G} = \frac{1}{1+W}}$$

Переходная характеристика:

наблюдать:

const

$$g = \text{const}$$



$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = e_{\text{ст}} \neq 0$$

G

1-порядка

$$g = G_0 + C_1 t$$



$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \infty$$

2-порядка

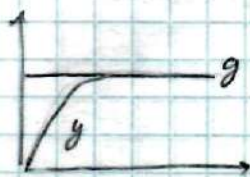
$$g = G_0 + C_1 t + C_2 t^2$$



$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \infty$$

1-порядка:

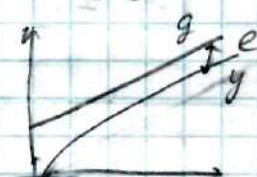
$$g = \text{const}$$



$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

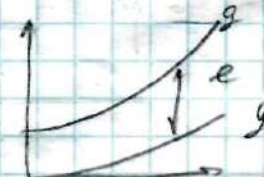
G

1-порядка



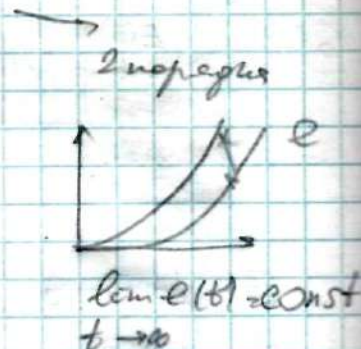
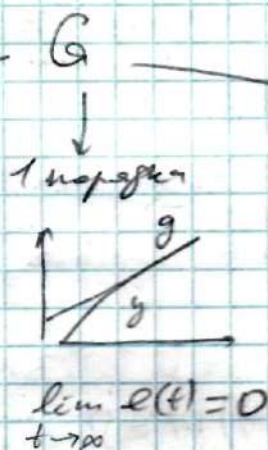
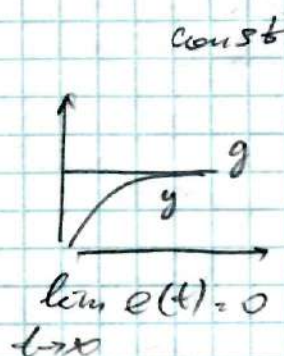
$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \text{const}$$

2-порядка



$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \infty$$

2-порядка



и т.д.

Теорема о конечном значении

- Если все полюса  $SY(s)$  имеют отрицательную действительную часть, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$$

В противном случае предел  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$  не существует или равен  $\infty$

$$Y(s) = \frac{4s^2 + 63s + 150}{s(s+3)(s+5)^2}$$

$$sY(s) = \frac{s(4s^2 + 63s + 150)}{s(s+3)(s+5)^2}$$

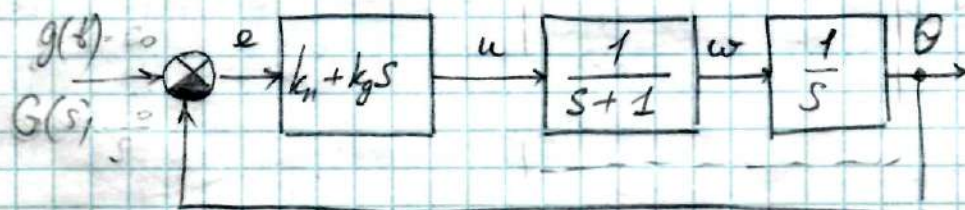
$$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{s}{s+3} + \frac{1}{(s+5)^2}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \frac{150}{3 \cdot 5^2} = 2$$

$$y(t) = 2 - 2e^{-3t} + te^{-5t}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 2$$

Двухканаль с ПД-регулятором



$$W(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{1}{1 + (k_n + k_d s) \left( \frac{1}{s+1} \right) \cdot \frac{1}{s}} = \frac{s(s+1)}{s^2 + (1+k_d)s + k_n}$$

если  $g(t) = C_0$  ;  $G(s) = \frac{C_0}{s}$

амплитда вывешения

$$E = \frac{W(s) \cdot G(s)}{s-x}$$

$$E(s) = \frac{s(s+1)}{s^2 + (1+k_0)s + k_n} \cdot \frac{C_0}{s}$$

используем правило Лопиталя

$$e_{ст} = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E(s) = 0 \cdot \frac{(0+1) \cdot C_0}{0+0+k_n}$$

если  $g(t) = C_0 + C_1 t$  ;  $\neq 0$   $e_{ст} = \frac{C_1}{k_n}$